



Voraussetzung und verwandte Themen

Für diese Beschreibungen sind Grundlagen der Mathematik vorteilhaft. Weiterführende und verwandte Themen sind die Nutzwertanalyse.

Einführung

Der sogenannte Analytische Hierarchieprozess, kurz AHP, dient zum Lösen von Entscheidungsproblemen mit vielen Kriterien. Er wurde von dem Mathematiker Thomas L. Saaty entwickelt. Der AHP bildet ein systematisches Verfahren, um Entscheidungsprozesse zu strukturieren und zu lösen. Die Einsatzmöglichkeiten sind vielfältig.

- **Analytisch** bedeutet, dass beim AHP die Entscheidung mittels logischer Schlüsse erfolgt und mathematisch verrechnet wird.
- **Hierarchisch** ist der AHP, weil die Bewertung in hierarchischer Form strukturiert werden kann.
- Als **Prozess** wird der AHP wegen seines prozessualen Charakters bezeichnet, was die Entscheidungen betrifft.

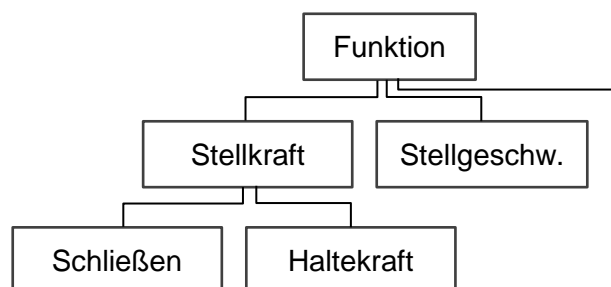
Ziel und Nutzen

Das Ziel ist es:

- Entscheidungen in Teams zu unterstützen.
- Die gemeinsam tragbare Lösung zu finden
- Die Entscheidungsfindung und das Ergebnis nachvollziehbar zu machen.
- Eventuelle Inkonsistenzen in der Entscheidungsfindung aufzudecken.

Grundlagen

Bei einer hierarchischen Struktur werden die Kriterien in Unterstrukturen aufgeteilt, z.B.



Für die folgenden Beschreibungen soll der Einfachheit halber nicht die Möglichkeit der hierarchischen Struktur genutzt werden, sondern nur eine einfache Kriterien Auflistung. Dies bedeutet für die oben dargestellte Struktur, dass man nur die unterste Ebene verwendet. Dadurch kann aber die Anzahl zu bewertenden Kriterien übermäßig ansteigen. Bei einfacheren Entscheidungsprozessen reicht aber eine nicht hierarchische Struktur meist aus.

Bewertungsmatrix

Zunächst werden Kriterien oder zu bewertende Argumente definiert, die in einer Matrix in Zeilen und Spalten gegenübergestellt werden. Dadurch ist eine paarweise Bewertung möglich.

⇒ Bewertet wird immer, ob die Zeile wichtiger ist als die Spalte.

	Funktion	Zuverlässigkeit	Gewicht	Kosten
Funktion	1	2	2	3
Zuverlässigkeit	1/2	1	1	2
Gewicht	1/2	1	1	5
Kosten	1/3	1/2	1/5	1

Für das Kriterium Zuverlässigkeit wurde entschieden, dass diese nur halb so wichtig ist wie die Funktion, ebenso das Gewicht. Andersrum ausgedrückt, ist die Funktion doppelt so wichtig wie die Zuverlässigkeit und das Gewicht, sowie dreimal so wichtig wie die Kosten (z.B. weil es um sicherheitsrelevante Themen geht).

Die Diagonale enthält jeweils eine 1, da dies nur die Kriterien gegen sich selber sind. Stellen die Elemente der Matrix a dar, so gilt:

$$a_{j,i} = \frac{1}{a_{i,j}}$$

Der Wert in der jeweiligen Diagonalen stellt immer den Kehrwert dar. Somit ist für die „Befüllung“ der Matrix eigentlich nur die untere Hälfte der Matrix nötig und die Eingabe kann z.B. so erfolgen:

	Funktion	Zuverlässigkeit	Gewicht	Kosten
Funktion	1			
Zuverlässigkeit	1/2	1		
Gewicht	1/2	1	1	
Kosten	1/3	1/2	1/5	1

Skalenwerte

In der Literatur wird eine Bewertung in folgenden Abstufungen verwendet:

- 1 = gleiche Bedeutung
- 3 = größere Bedeutung
- 5 = deutlich größere Bedeutung
- 7 = sehr viel größere Bedeutung
- 9 = absolut dominierend

Diese „Spreizung“ erscheint in vielen Fällen als zu extrem. Es empfiehlt sich für die praktische Anwendung eine geringere Anzahl Abstufungen, die auch nicht so extrem auseinander liegt:

- 1 = gleiche Bedeutung
- 2 = größere Bedeutung

Analytischer Hierarchieprozess

3 = deutlich größere Bedeutung

5 = erheblich größere Bedeutung

Natürlich sind jederzeit Zwischenwert anwendbar. Ist die Bedeutung umgekehrt, so sind diese Werte als Kehrwert zu verwenden.

Die Frage ist nun wie man zu einer Rangfolge der wichtigsten Kriterien kommt. Ein einfaches Auszählen führt hier nicht zu dem gewünschten Ergebnis, da es innerhalb der Tabelle auch Widersprüche geben kann. Das Verfahren des AHP soll dies berücksichtigen.

Auswertung

Für die Auswertung werden die sogenannten Eigenwerte bzw. die Eigenvektoren benötigt.

Nach vollständiger Bewertung wird eine quadratische Matrix mit Dezimalzahlen gebildet. Für das eingangs beschriebene Beispiel ergibt sich:

Funktion	1	2	2	3
Zuverlässigkeit	0,5	1	1	2
Gewicht	0,5	1	1	5
Kosten	0,33	0,5	0,2	1

Die folgenden Schritte sind wie folgt:

1. Die Matrix wird sukzessive quadriert.
2. Berechnung des Eigenvektors
3. Diese Berechnung stoppt dann, wenn der Unterschied zwischen zwei aufeinanderfolgenden Rechenschritten vernachlässigbar ist.

Eine Matrixmultiplikation, in diesem Fall $A^2 = A \cdot A$, erfolgt jeweils durch Summieren der Produkte aus Zeilen und Spaltenwerten (hier ist 1. Index = Spalte; 2. Index = Zeile; sowie $n = \text{Dimension der Matrix} = 4$):

$$a_{k,i}^2 = \sum_{j=1}^n a_{j,i} a_{k,j}$$

Z.B. für die erste Zahl oben links ergibt sich $(1 \times 1) + (2 \times 0,5) + (2 \times 0,5) + (3 \times 0,333) = 4,00$. Insgesamt ist das Ergebnis des ersten Quadrierens:

4,00	7,50	6,60	20,00
2,17	4,00	3,40	10,50
3,17	5,50	4,00	13,50
1,02	1,87	1,57	4,00

Für die Berechnung des Eigenvektors EV wird die Reihensumme gebildet und normiert (Reihensumme wird durch Gesamtsumme geteilt):

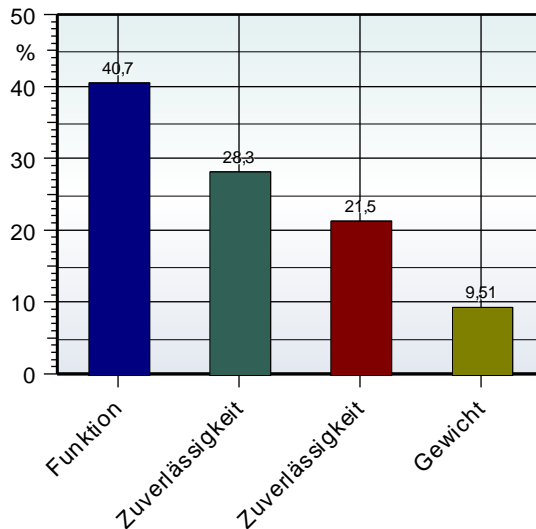
4,00 + 7,50 + 6,60 + 20,00	=	38,10	normiert 0,410 0,216 0,282 0,091 1,000	← Eigenvektor EV 1. Durchgang
2,17 + 4,00 + 3,40 + 10,50	=	20,07		
3,17 + 5,50 + 4,00 + 13,50	=	26,17		
1,02 + 1,87 + 1,57 + 4,00	=	8,46		
Σ		92,80		

Analytischer Hierarchieprozess

Die Wiederholung des Schrittes 1 und 2, bis sich keine nennenswerten Unterschiede mehr ergeben, ist:

Funktion	0,407	← Eigenvektor <i>EV</i> hier nach 3 Durchläufen
Zuverlässigkeit	0,215	
Gewicht	0,283	
Kosten	0,095	

Betrachtet man den Eigenvektor in Prozent, so stellt sich in einer Paretodarstellung folgendes Ranking dar:



Bei paarweisen Vergleichen kann es zu Widersprüchen kommen. Für die Beurteilung dieser Inkonsistenzen wird ein sogenannter Consistency Ratio *CR* eingeführt, wobei $CR < 0,1$ als unbedenklich gilt.

$$CR = \frac{CI}{Rn} ; CI = \frac{x_{\max} - n}{n - 1}$$

$$\text{mit } x_{\max} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i ; x_i = \frac{\sum_{j=1}^n a_{j,i} EV_j}{EV_i}$$

<i>n</i>	<i>Rn</i>
3	0,52
4	0,89
5	1,11
6	1,25
7	1,35
8	1,40
9	1,45
10	1,49

<i>n</i>	<i>Rn</i>
11	1,51
12	1,54
13	1,56
14	1,57
15	1,58

Hinweis: Es gibt Autoren, die etwas andere verwenden. Die linke Tabelle stammt von Saaty, die rechte aus der Uni Essen. Aus dieser Tabelle lässt sich folgende vereinfachte Gleichung bilden:

$$3 \leq n \leq 7 : Rn = 1,978 - \frac{4,364}{n}$$

$$8 \leq n \leq 10 : Rn = 2,403 - \frac{20,437}{n + 12,4}$$

$$11 \leq n : Rn \approx 1,773 - \frac{2,821}{n + 0,08}$$

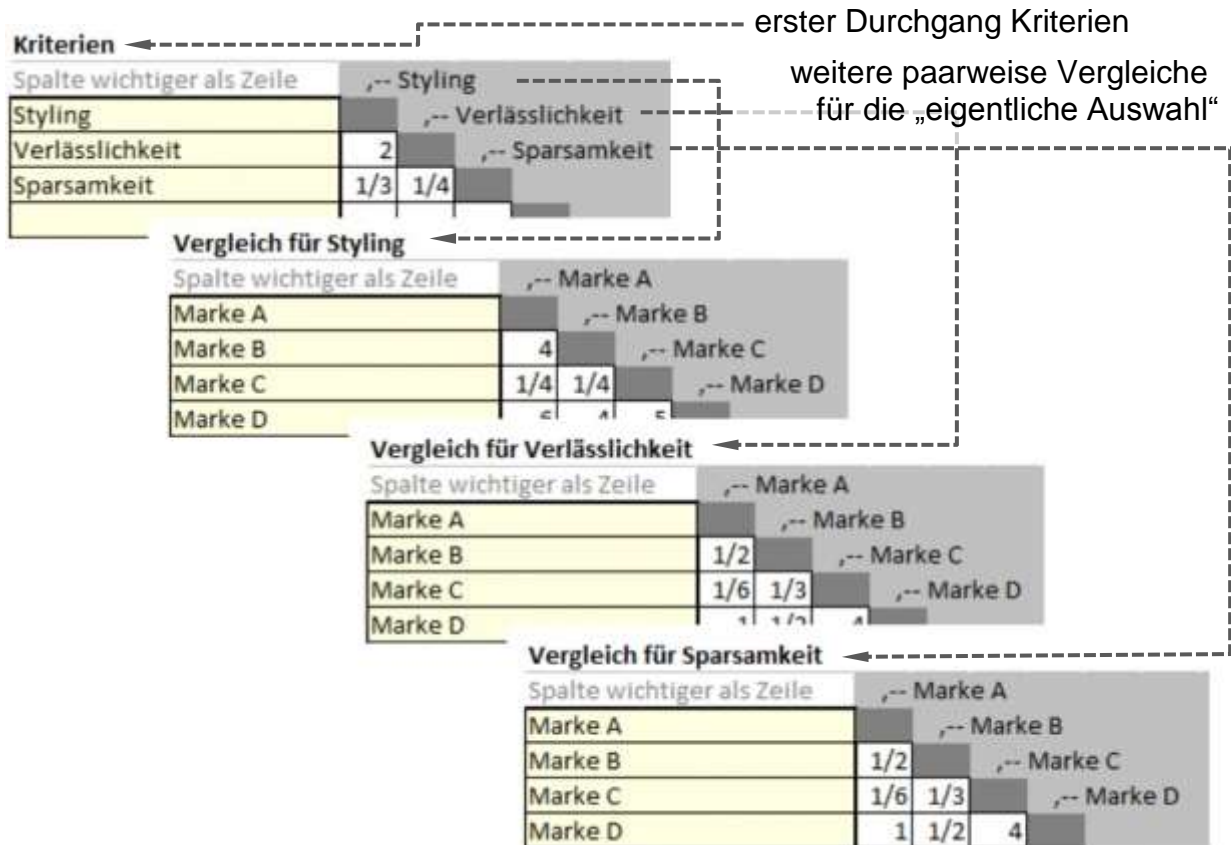
Letzte Gleichung trifft die Werte der zweiten Tabelle nicht perfekt, bietet aber die einzige Möglichkeit *Rn* auch für $n > 15$ zu bestimmen.

Analytischer Hierarchieprozess

Der Consistency Ratio *CR* sagt allerdings nur etwas darüber aus, ob es generell zu Inkonsistenzen kommt, nicht aber an welchen paarweisen Vergleichen es gelegen hat.

Mehrstufiges Verfahren

Die beschriebene Methode wurde zunächst für die Bestimmung der Wichtigkeit von Kriterien verwendet. Diese Kriterien werden aber meist als Gewichtung für eine eigentliche Auswahl benötigt. Für das eingangs beschriebene Beispiel wären das die Kriterien etwa für die Auswahl eines Fahrzeugkaufes. Verschiedene Marken sind zunächst auf die gleiche Weise zu bewerten, allerdings für jedes Kriterium getrennt. Das Ganze würde dann so aussehen:



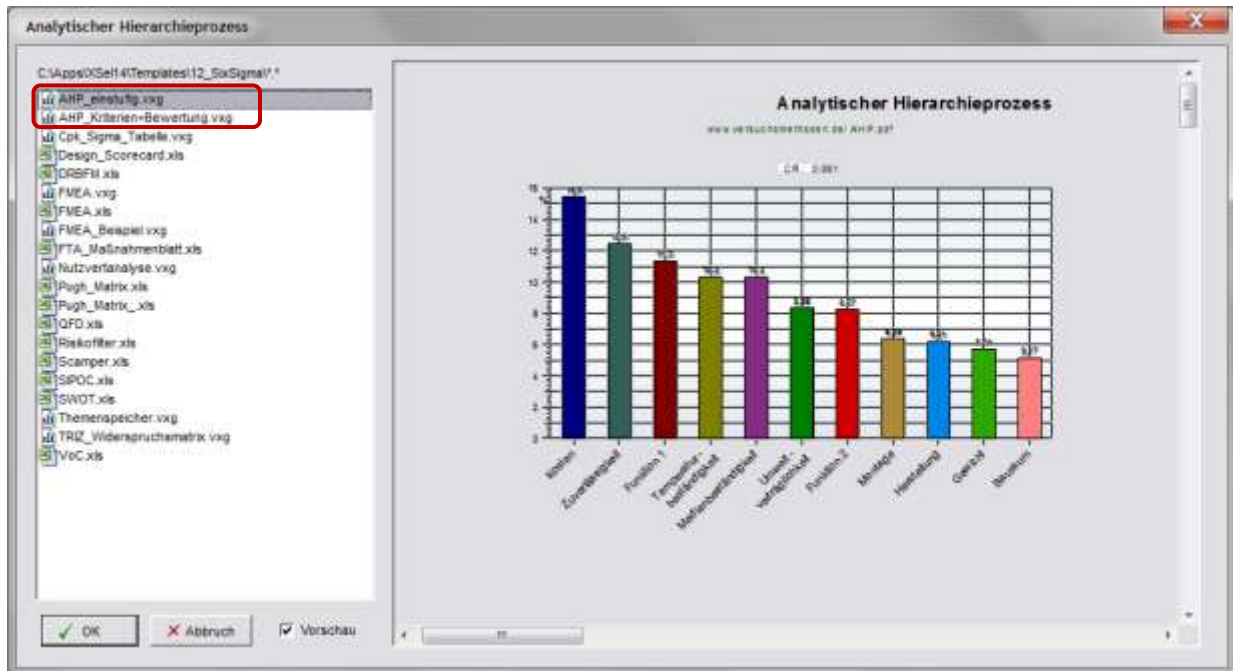
Die normierten Eigenvektoren der „eigentlichen Auswahl“ werden mit dem Eigenvektor der Kriterien multipliziert (gewichtet). Dadurch erhält man eine wesentlich gezieltere Entscheidungsbasis.

Man muss hier so viele Vergleiche wie Kriterien durchführen. Der Nachteil ist dabei, dass der Aufwand entsprechend groß ist.

Anwendung in Visual-XSel 14.0

www.crgraph.de

Die Methode wird in Visual-XSel über ein Template bereitgestellt. Dieses kann geöffnet werden über den Menüpunkt *Datei / Templates / Six Sigma*, oder über den Startleitfaden Six Sigma



Es gibt zwei Dateien für die AHP-Auswertung. Die erste ist die einstufige Bewertung, bei der bis zu 32 Kriterien bewertet werden können.

Die zweite Datei ermöglicht in zwei Schritten zunächst Kriterien zu „gewichten“ und danach einen „eigentlichen paarweisen Vergleich“ für jedes Kriterium, siehe Beispiel Fahrzeugkauf.

