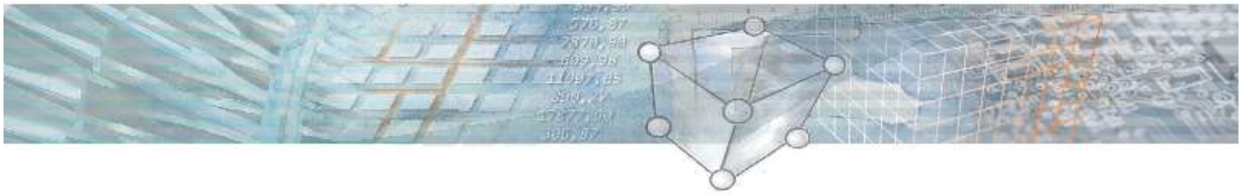
ANOVA



Voraussetzung und verwandte Themen

Für diese Beschreibungen sind Grundlagen der Statistik vorteilhaft. Weiterführende und verwandte Themen sind:

media.crgraph.de/Hypothesentests.pdf

media.crgraph.de/Multiple_Regression.pdf

Stichworte: **ANOVA - Varianzanalyse - Mittelwertvergleich - One-Way - Two Way - Balanciert**

Einführung

In der Varianzanalyse (**An**alysis **o**f **Va**riance oder kurz ANOVA) geht es darum, die Varianzen von Gruppen (Faktoren) gegenüber der unerklärten Varianz (Reststreuung) zu bestimmen und einen signifikanten Einfluss zu bestätigen oder abzulehnen.
Historisch war die ANOVA das Auswertetool für Versuchspläne (DoE). Alternativ können Regressionsverfahren in der Regel mehr leisten.

Ziel und Nutzen

Mit der ANOVA soll die Hypothese auf gleiche Mittelwerte von Datenreihen, oder der Zusammenhang von Einflüssen (Faktoren) auf eine Zielgröße (z.B. Messwerte) bestimmt werden.

Grundlagen

Die bekannten Verfahren der ANOVA sind vielfältig. In diese Dokumentation werden nur die wichtigsten Verfahren beschrieben:

Allgemein wird in einer ANOVA eine sogenannte Streuungszerlegung durchgeführt, um systematische Einflüsse von Faktoren von einer zufälligen Streuung zu unterscheiden. Das allgemeine Modell ist:

Gesamtabweichung = erklärte Abweichung + unerklärte Abweichung

$$SS_{Total} = SS_{Faktoren} + SS_{Error}$$

$$\sum_{j=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ji}-\bar{y}\right)^2 = n\sum_{j=1}^{z}\left(\bar{y}_j-\bar{y}\right)^2 + \sum_{j=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ji}-\bar{y}_j\right)^2$$

Summe der quadrierten Gesamtabweichung

Summe der quadrierten Abweichungen zwischen den Faktorstufen

Summe der quadrierten Abweichungen innerhalb der Faktorstufen

SS	Sum of Squares
y_{ji}	Datenpunkt von Spalte j und Zeile i
$\bar{y}_j$	Mittelwert der Spalte j
$\bar{y}$	Mittelwert über alle Daten

		Faktoren				
		1	2	3	…	z
Messung	1	y_{11}	y_{21}	y_{31}	…	y_{z1}
	2	y_{12}	y_{22}	y_{32}	…	y_{z2}
	3	y_{13}	y_{23}	y_{33}	…	y_{z3}
	…	…	…	…	…	…
	n	y_{1n}	y_{2n}	y_{3n}	…	y_{zn}

Die Varianzen = Mean Square MS ergeben sich mit Hilfe der Freiheitsgrade z = Anzahl Faktoren und n = Anzahl Beobachtungen (Versuche):

$$MS_{Total} = \left(\frac{SS_{Total}}{z\,n-1} \right) \quad MS_{Factors} = \left(\frac{SS_{Factors}}{z-1} \right) \quad MS_{Error} = \left(\frac{SS_{Error}}{z\,(n-1)} \right)$$

Die Werte $MS_{Factors}$ und MS_{Error} werden ins Verhältnis zueinander gesetzt. Diesen Ausdruck bildet die Teststatistik für die ANOVA, den Test auf gleiche Mittelwerte.

$$F = \frac{MS_{Factors}}{MS_{Error}}$$

Je größer der F-Wert ist, desto höher ist die Wahrscheinlichkeit für den Einfluss des Faktors. Die Nullhypothese Ho lautet: Die Mittelwerte der Faktoren unterscheiden sich nicht voneinander. Ho wird abgelehnt, wenn die Wahrscheinlichkeit aus der F-Verteilung mit den Freiheitsgraden $f1 = z\text{-}1$ und $f2 = z\ (n\text{-}1)$ kleiner als das Signifikanzniveau α ist, siehe media.crgraph.de/Hypothesentests.

Das sogenannte Bestimmtheitsmaß R^2 beschreibt wie viel die Faktoren die Zusammenhänge beschreiben. Der maximal Wert ist R^2=1. Je größer die Streuung ist, desto geringer ist R^2.

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{Error}}{SS_{Total}}$$

One-Way ANOVA balanciert (µ1 = µ2 = µ3…)

Für mehrere Datenspalten mit gleichem Umfang ist die Nullhypothese

µ1 = µ2 = µ2 = …

zu testen. Die Voraussetzung für diesen Test ist, dass die Datenreihen normalverteilt sind. Die Varianzen müssen gleich sein, was über den F-Test geprüft werden kann. Alternativ ist der t-Test möglich, bei dem unterschiedliche Varianzen möglich sind. Die Datenreihen müssen voneinander unabhängig sein. Für folgendes Beispiel soll die Nullhypothese geprüft werden, dass alle Mittelwerte gleich sind.

Für die Berechnung werden die *Sum of Squares* kurz SS und die Freiheitsgrade = Degrees of Freedom = DF wie folgt bestimmt:

z

	A	B	C	
	1,0	4,0	5,5	
	1,5	5,5	6,5	
	2,5	6,0	8,0	
	4,0	7,0	9,0	
n	5,0	9,0	9,5	
$\bar{y}$	2,8	6,3	7,7	$\bar{\bar{y}} = 5{,}6$
$\bar{y} - \bar{\bar{y}}$	-2,8	0,7	2,1	
$(\bar{y} - \bar{\bar{y}})^2$	7,84	0,49	4,41	12,74

$$SS_{Total} = \sum_{j=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{j,i} - \bar{\bar{y}}\right)^2 = 100{,}1$$

$$SS_{Faktors} = n \cdot (\bar{y} - \bar{\bar{y}})^2 = 5 \cdot 12{,}74 = 63{,}7$$

$$SS_{Error} = SS_{Total} - SS_{Factors} = 36{,}4$$

$$DF_{Total} = n \cdot z - 1 = 14$$

$$DF_{Factors} = z - 1 = 2$$

$$DF_{Error} = DF_{Total} - DF_{Factors} = 12$$

Ergebnistabelle:

	DF	SS	MS	F	p-val
Factors	2	63,7	31,85	10,50	0,0023
Error	12	36,4	3,03		
Total	14	100,1			

Der *p-value* errechnet sich über die Fisher-Verteilung mit $f1 = DF_{Faktors}$; $f2 = DF_{Error}$

$$p\text{-value} = 1 - Fisher(F; f1; f2) = 1 - Fisher(10{,}5; 2; 12) = 0{,}0023$$

Da der *p-value* das festgelegte Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ unterschreitet, wird die Nullhypothese, dass die Mittelwerte gleich sind, verworfen.

Two-Way ANOVA balanciert

Im Gegensatz zur One-Way ANOVA gibt es in der Two-Way eine Zielgröße auf die Faktoren wirken. Das Ziel ist es hier einen Zusammenhang zwischen den Faktoren und der Zielgröße zu bestimmen. Die Faktoren müssen gleich viele Beobachtungen aufweisen (balanciert) unabhängig voneinander sein, vergleichbare Streuungen haben, sowie normalverteilt sein.

Die Streuungszerlegung ist hier:

$$SS_{abs} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 \qquad SS_{Total} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - SS_{abs}$$

$$SS_A = \frac{1}{bk}\sum_{i=1}^{a} \bar{y}_i^2 - SS_{abs}$$

$$SS_B = \frac{1}{ak}\sum_{j=1}^{b} \bar{y}_j^2 - SS_{abs}$$

$$SS_{AB} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \bar{y}_{ji}^2 - SS_A - SS_B - SS_{abs}$$

$$SS_{Error} = SS_{tot} - SS_A - SS_B - SS_{AB}$$

n : Gesamtanzahl

a : Anzahl Stufen Faktor A

b : Anzahl Stufen Faktor B

k : Anzahl Wiederholungen

$\bar{y}_i$: Mittelwert der i-ten Faktorstufe von Faktor A

$\bar{y}_j$: Mittelwert der j-ten Faktorstufe von Faktor B

Die Ergebnisse für ein zweifaktorielles Beispiel mit den Einflüssen eines Zusatzstoffe und der Temperatur auf einen Prozess (Zielgröße) werden generell in der gezeigten tabellarischen Form ausgegeben. Der F-Wert ist das Verhältnis zwischen der Varianz (Mean Square) der Faktoren und der Wechselwirkung zur Varianz der Streuung (Error). Hieraus wird die Irrtumswahrscheinlichkeit (p-value) über die F-Verteilung bestimmt:

	DF	SS	MS	F	p-val
Zusatzstoff	3	2,608E+02	8,692E+01	4,99	0,008
Temperatur	2	8,029E+02	4,014E+02	23,05	0,002
Zusatzstoff*Temperatur	6	3,340E+02	5,567E+01	3,20	0,019
Error	24	4,180E+02	1,742E+01		
Total	35	1,816E+03			

Two-Way ANOVA balanciert mit Zufallsfaktoren (Random)

Zufallsfaktoren haben zufällig ausgewählte Stufen, während die Stufen von festen Faktoren z.B. durch eine DoE festgelegt wurden. Im folgenden Beispiel ergaben sich Temperaturen, die nicht systematisch vorgegeben wurden.

Anstelle die Varianz MS des Zusatzstoffes auf die Varianz des Fehlers MS_{Error} zu beziehen, wird hier auf die Varianz der Wechselwirkung bezogen.

	DF	SS	MS	F	p-val	Typ
Zusatzstoff	3	2,61E+02	8,69E+01	1,56	0,294	fest
Temperatur	2	8,03E+02	4,01E+02	10,5	0,017	zufällig
Zusatzstoff*Temperatur	6	3,34E+02	5,57E+01	3,2	0,019	
Error	24	4,18E+02	1,74E+01			
Total	35	1,82E+03				

Dieses Verfahren wird bei der Mess-System-Analyse mit ANOVA nach VDA Band 5 verwendet. Hier sind verwendete Teile für die Wiederholmessung und die Prüfer zufällig und nicht dieselben, wie z.B. später für die Bestimmung einer Prozessfähigkeit.

Two-Way ANOVA geschachtelt (nested)

In einer sogenannten geschachtelten ANOVA gibt es einen nicht frei kombinierbaren Faktor. Alle Faktoren im Modell müssen Zufallsfaktoren sein. In diesem Beispiel wird die Temperatur durch unterschiedliche Aufheizvorgänge in einem Ofen erzeugt. Jede Temperaturstufe ist also in den Zusatzstoffen geschachtelt. Anstelle die Varianz MS des Zusatzstoffes auf MS_{Error} zu beziehen, wird hier auf den zweiten geschachtelten Faktor Temperatur bezogen.

	DF	SS	MS	F	p-val
Zusatzstoff	2	8,03E+02	4,01E+02	6,075	0,022
Temperatur	9	5,95E+02	6,61E+01	3,794	0,004
Error	24	4,18E+02	1,74E+01		
Total	35	1,82E+03			

Der letzte Faktor wird schließlich auf MS_{Error} bezogen.

Eine geschachtelte ANOVA wird insbesondere bei der Mess-System-Analyse angewendet, wenn die eigentlich wiederholend zu messenden Teile aufgrund von zerstörenden Prüfungen immer andere sein müssen.

Auf weitere Beschreibungen sei auf das Buch der Versuchsplanung von Prof. Kleppmann verwiesen.

Modell ANOVA

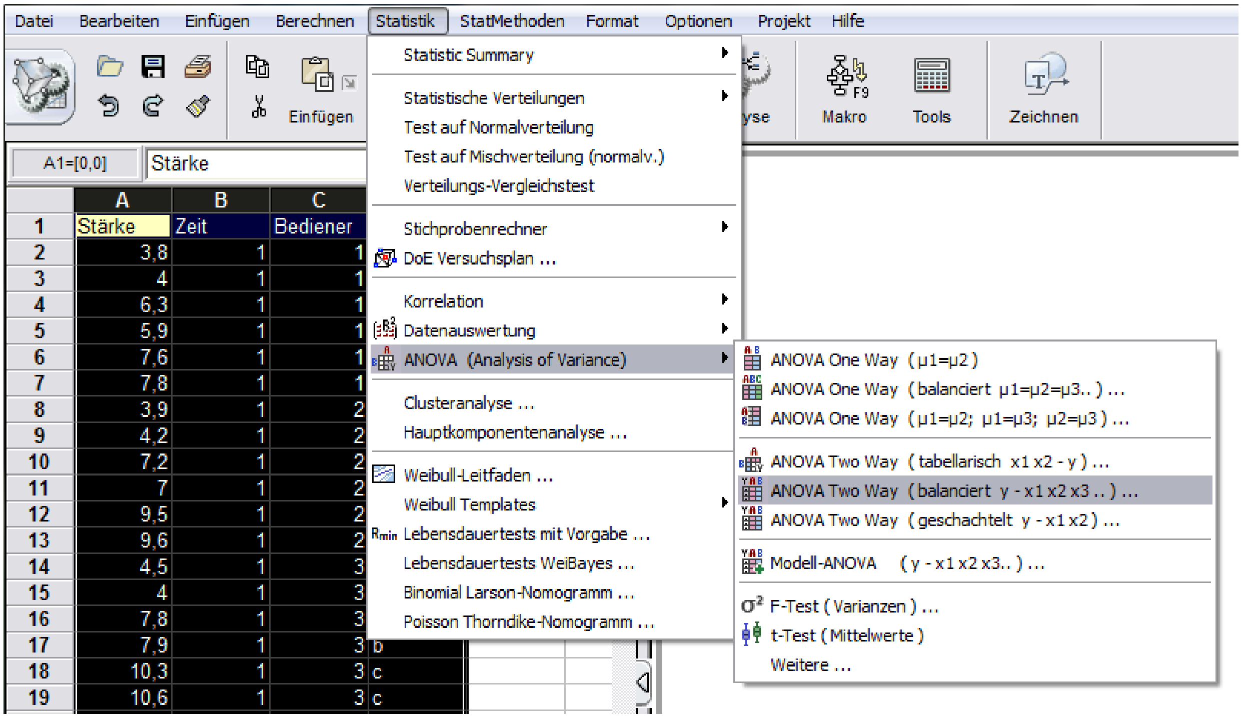
Bei der sogenannten Modell-ANOVA werden die Sum of Squares auf eine Funktion aus einem Regressionsmodell bezogen. Ausführliche Informationen sind hierzu beschrieben unter:
media.crgraph.de/Multiple_Regression.pdf .

Anwendung in Visual-XSel 14.0

www.crgraph.de

Bis auf die Modell-ANOVA sind alle Verfahren als Templates verfügbar. Diese befinden sich im Verzeichnis ..\Templates\03_Datenauswertung\..

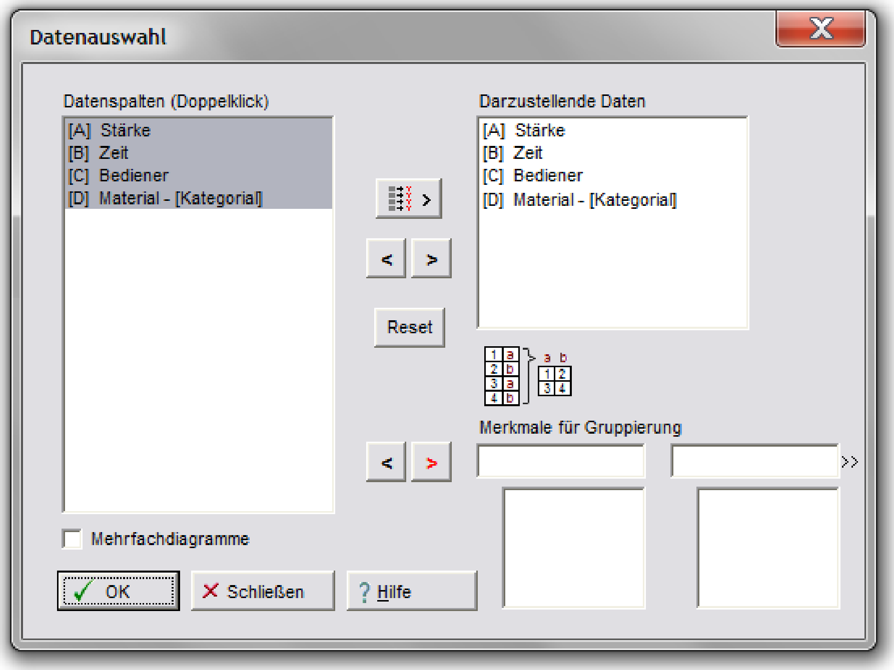
Im folgenden Beispiel soll über eine ANOVA der Zusammenhang von Zeit, Bediener und Material auf eine Stärke (Zielgröße) untersucht werden. Gegebene sind folgende Datenreihen, die zunächst zu markieren sind. Da es eine Zielgröße gibt und die Daten in Spalten vorliegen, ist die ANOVA Two Way balanciert auszuwählen:



	A	B	C
1	Stärke	Zeit	Bediener
2	3,8	1	1
3	4	1	1
4	6,3	1	1
5	5,9	1	1
6	7,6	1	1
7	7,8	1	1
8	3,9	1	2
9	4,2	1	2
10	7,2	1	2
11	7	1	2
12	9,5	1	2
13	9,6	1	2
14	4,5	1	3
15	4	1	3
16	7,8	1	3
17	7,9	1	3
18	10,3	1	3
19	10,6	1	3

Im darauffolgenden Dialog kann nochmal überprüft werden, ob die richtigen Datenspalten verwendet wurden (*Darzustellende Daten*).

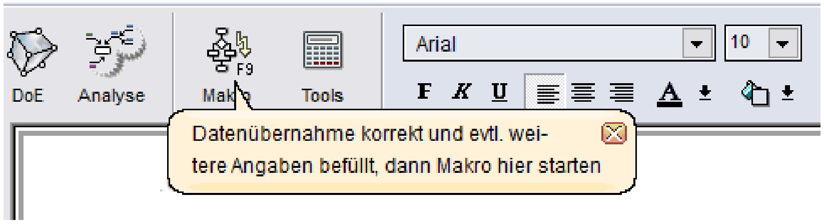
Nachdem das Template geladen wurde, ist das Makro über die entsprechende Ikone, oder über F9 zu starten:



Datenspalten (Doppelklick):
[A] Stärke
[B] Zeit
[C] Bediener
[D] Material - [Kategorial]

Darzustellende Daten:
[A] Stärke
[B] Zeit
[C] Bediener
[D] Material - [Kategorial]

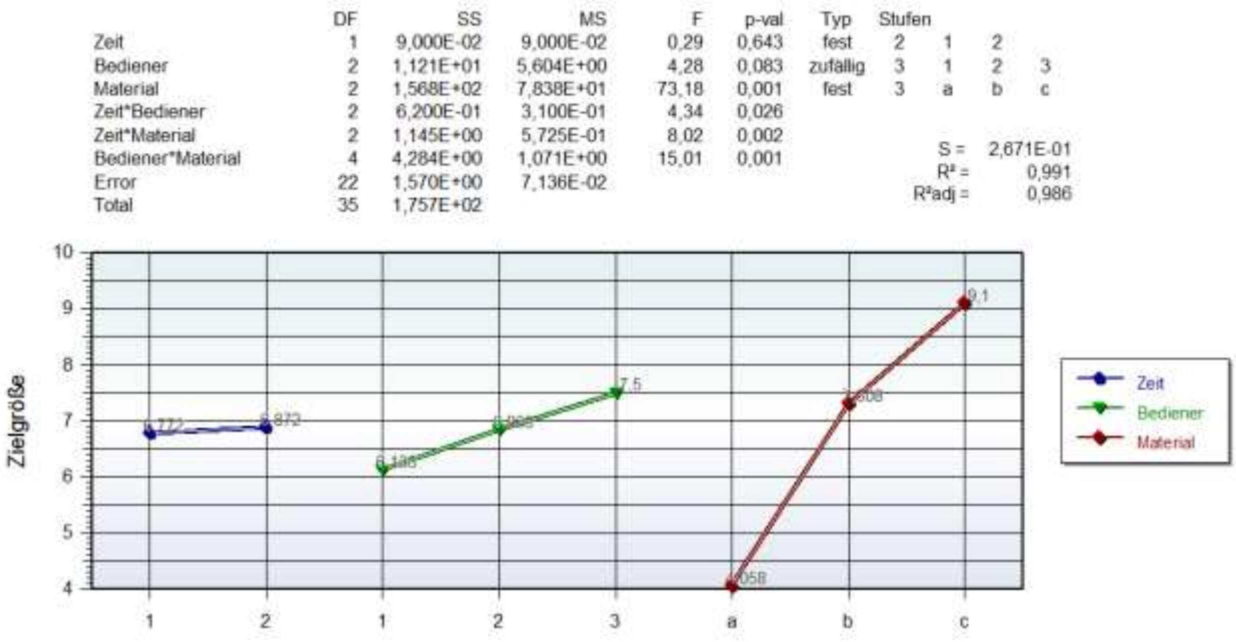
ANOVA



Datenübernahme korrekt und evtl. weitere Angaben befüllt, dann Makro hier starten

Es folgt eine Abfrage, ob das Modell mit Wechselwirkung erstellt werden soll und welche zufällige Faktoren sind. Da die Bediener nicht die selben Personen sind, wie bei dem späteren Prozess, ist hier der zweite Parameter als zufällig zu deklarieren.

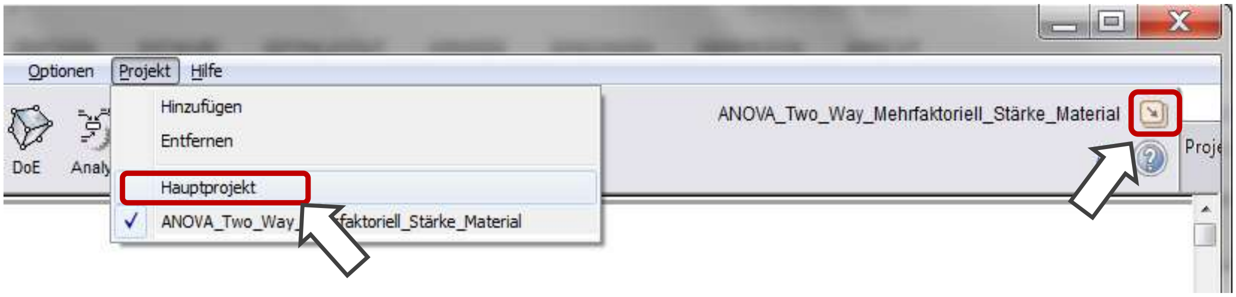
Das Ergebnise wird im Hauptfenster des eingebetteten Templates ausgegeben:



	DF	SS	MS	F	p-val	Typ	Stufen			
Zeit	1	9,000E-02	9,000E-02	0,29	0,643	fest	2	1	2	
Bediener	2	1,121E+01	5,604E+00	4,28	0,083	zufällig	3	1	2	3
Material	2	1,568E+02	7,838E+01	73,18	0,001	fest	3	a	b	c
Zeit*Bediener	2	6,200E-01	3,100E-01	4,34	0,026					
Zeit*Material	2	1,145E+00	5,725E-01	8,02	0,002					
Bediener*Material	4	4,284E+00	1,071E+00	15,01	0,001					
Error	22	1,570E+00	7,136E-02							
Total	35	1,757E+02								

S = 2,671E-01
R² = 0,991
R²adj = 0,986

Um wieder in die ursprüngliche Ausgangstabelle zu gelangen, ist unter dem Menüpunkt *Projekt* das *Hauptprojekt* auszuwählen, oder das Template rechts außen zu schließen



Literatur

Taschenbuch der statistischen Qualitäts- und Zuverlässigkeitsmethoden

Die wichtigsten Methoden und Verfahren für die Praxis.

Taschenbuch
der statistischen Qualitäts-
und Zuverlässigkeitsmethoden

Die wichtigsten
Methoden und Verfahren
für die Praxis

Beinhaltet statistische Methoden für Versuchsplanung & Datenanalyse, sowie Zuverlässigkeit & Weibull.

- Statistische Verteilungen und Tests & Mischverteilungen
- Six Sigma Einführung und Zyklen
- Systemanalysen Wirkdiagramm, FMEA, FTA, Matrizen-Methoden
- Shainin- und Taguchi-Methoden
- Versuchsplanung DoE, D-Optimal
- Korrelations- und Regressionsverfahren
- Multivariate Datenauswertungen
- Prozessfähigkeit – Messmittelfähigkeit MSA 4 und VDA 5
- Regelkarten
- Toleranzrechnung und Monte-Carlo-Simulation
- Statistische Hypothesentests
- Weibull und Lebensdaueranalysen
- Stichprobengröße

190 Seiten, Ringbuch

ISBN: 978-3-00-043678-9