Hypothesentests

Voraussetzung und verwandte Themen

Für diese Beschreibungen sind Grundlagen der Statistik vorteilhaft. Weiterführende und verwandte Themen sind:

www.versuchsmethoden.de/Normalverteilung.pdf

Einführung

In einem Hypothesentest wir anhand einer Stichprobe eine Aussage auf die Eigenschaft der Grundgesamtheit gemacht. Es gibt zwei Möglichkeiten zur Definition einer Hypothese:

- Die **Nullhypothese** H_o behauptet:
  Es besteht Gleichheit (z.B. die Mittelwerte zweier Stichproben sind gleich, oder der Mittelwert einer angelieferten Charge entspricht der Vorgabe des Kunden, oder der Verbrauch zweier Fahrzeuge ist gleich, etc.).
- Die **Alternativ-Hypothese** H_1 behauptet:
  Es gibt einen Unterschied (z.B. die Mittelwerte zweier Stichproben sind ungleich, oder die angelieferte Ware ist fehlerhaft, etc.).

Aussagen hierzu sind mit einer unvermeidbaren Unsicherheit behaftet, die statistisch über eine Irrtumswahrscheinlichkeit bewertet wird.

Ziel und Nutzen

Mit Hilfe der Hypothesentests kann auf Basis einer festgelegten Irrtumswahrscheinlichkeit eine Entscheidung getroffen werden.

Grundlagen

Bei der Durchführung eines statistischen Tests können zwei Arten von Fehlern gemacht werden:

- Die Nullhypothese H_o ist richtig und wird abgelehnt!
  ⇨ diesen Fehler bezeichnet man als Fehler 1. Art, oder den α-Fehler, oder das Produzentenrisiko.
- Die Nullhypothese H_o wird angenommen, obwohl sie falsch ist!
  ⇨ diesen Fehler bezeichnet man als Fehler 2. Art, oder den β-Fehler, oder das Konsumentenrisiko.

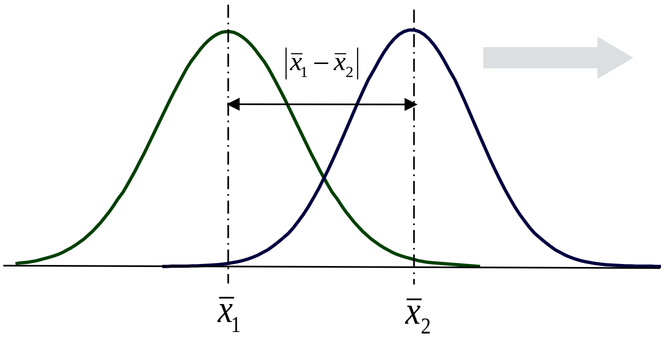
Insgesamt gibt es folgende vier Situationen:

H_o : Nullhypothese;
H_1 oder H_A : Alternativhypothese

		Wirklichkeit	
		H_o	H_1
Entscheidung	H_o	richtig	β-Fehler (2. Art)
	H_1	α-Fehler (1. Art)	richtig

Bestimmung des α-Fehlers am Beispiel Mittelwertvergleich

Es ist die Nullhypothese H_o zu prüfen : die Mittelwerte zweier Stichproben sind gleich.

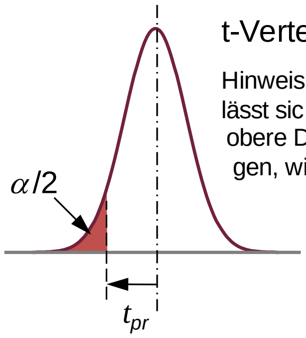


Der Abstand der Mittelwerte wird normiert auf eine gemeinsame Standardabweichung s_d

$$t_{pr} = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{s_d} \qquad s_d = \sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{n}}$$

(für gleiche Stichprobenumfänge, $n = n_1 = n_2$)

Mit Hilfe der t-Verteilung (Studentverteilung) erhält man den gesuchten Wert für den α-Fehler.



t-Verteilung

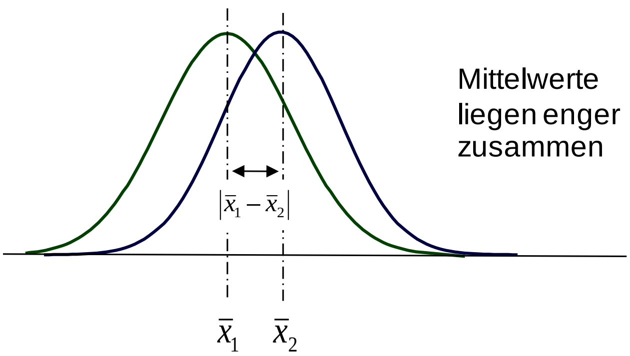
Hinweis: Die Fläche $\alpha/2$ lässt sich nicht in das obere Diagramm übertragen, wie oft zu sehen ist.

$\alpha = 2 \cdot \text{VertlgStudent}(-t_{pr}; f)$

Freiheitsgrad $f = n_1 + n_2 - 2$ für gleiche Standardabw. der Stichproben.

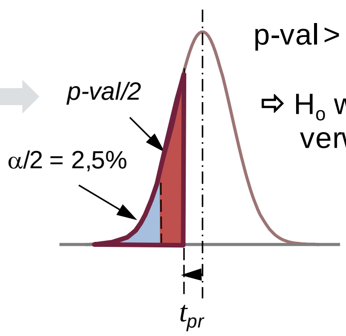
Der p-Value

Man legt für den Fehler 1. Art einen zulässigen Grenzwert für α fest, in der Regel 5%. Den tatsächlich vorhandenen Wert nennt man den **p-Value**.



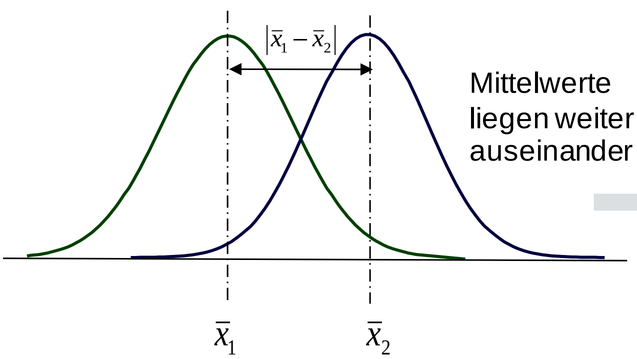
Mittelwerte liegen enger zusammen

Verteilung für t_{pr}

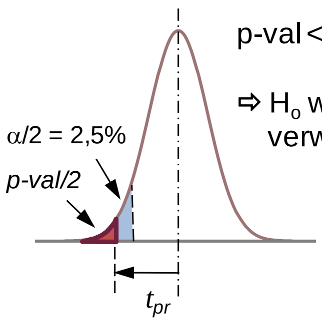


p-val > α

⇨ H_o wird nicht verworfen



Mittelwerte liegen weiter auseinander



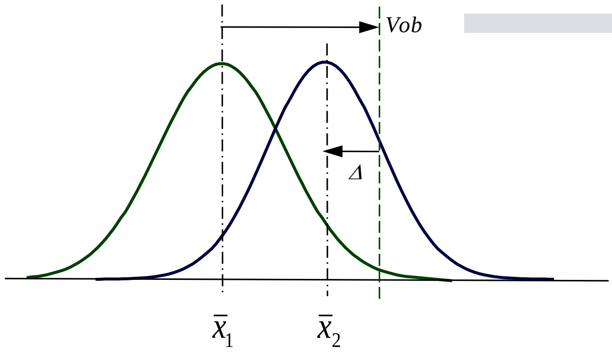
p-val < α

⇨ H_o wird verworfen

Merke: „If p-val is low, H_o must go“

Bestimmung des β-Fehlers am Beispiel Mittelwertvergleich

Es ist H_1 zu prüfen, die Mittelwerte zweier Stichproben sind ungleich.



Bestimmung eines Vertrauensbereiches für $\bar{x}_1$ der ersten Daten

$$V_{ob} = \bar{x}_1 + t_{1-\alpha/2} \cdot s_d$$

$t_{1-\alpha}$ = Wert aus der t-Verteilung für α = 5%

Δ : um wieviel ragt $\bar{x}_2$ in den Vertrauensbereich von $\bar{x}_1$

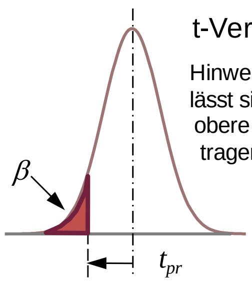
$$\Delta = \bar{x}_2 - V_{ob}$$

$$t_{pr} = \frac{\Delta}{s_d}$$

dieser Abstand wird normiert auf eine gemeinsame Standard-abweichung (siehe α)

Mit Hilfe der t-Verteilung (Studentverteilung) erhält man den gesuchten Wert für den β-Fehler.

t-Verteilung

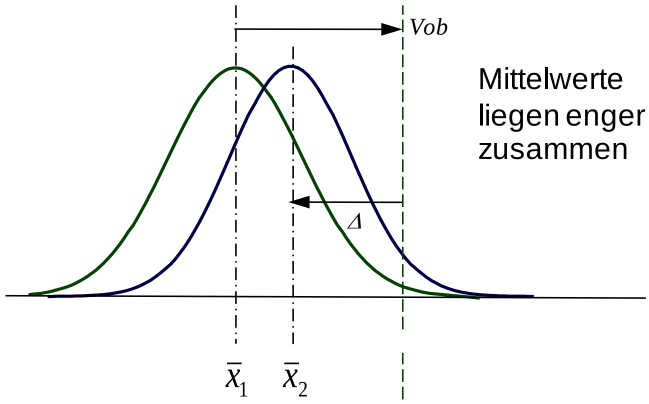


Hinweis: Die Fläche β lässt sich nicht in das obere Diagramm übertragen, wie oft zu sehen ist.

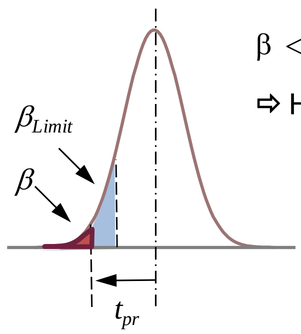
β = VertlgStudent($-t_{pr}$; f)

Freiheitsgrad $f = n_1 + n_2 - 2$ für gleiche Standardabw. der Stichproben (hier wird nicht auf die Hälfte gerechnet)

Man legt für den Fehler 2. Art einen zul. Grenzwert fest β_{Limit}, in der Regel 10-20%*.

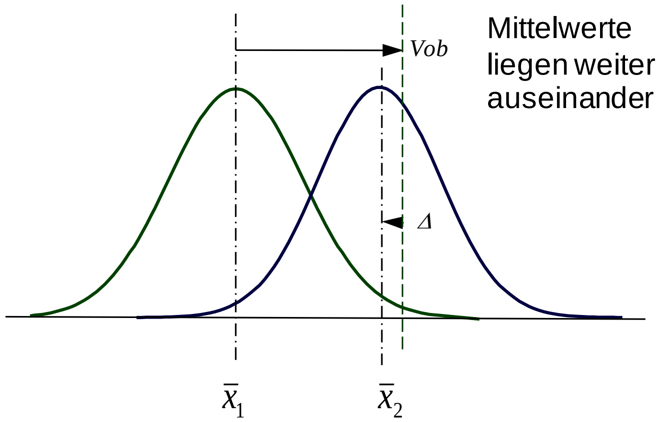


Mittelwerte liegen enger zusammen

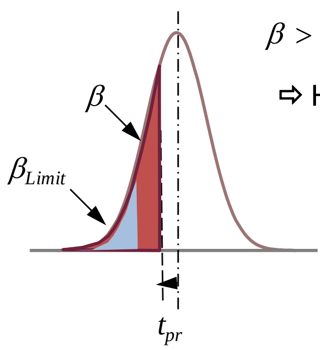


$\beta < \beta_{Limit}$

⇨ H_1 wird verworfen



Mittelwerte liegen weiter auseinander



$\beta > \beta_{Limit}$

⇨ H_1 wird nicht verworfen

Hinweis: Ein Gegenstück zum p-value gibt es hier nicht.

Zusammenfassung zu Fehler 1. und 2. Art

Man kann nicht gleichzeitig das Risiko der 1. Art und 2. Art minimieren!
Die Entscheidung muss aufgrund der einen oder anderen Art getroffen werden.

Entscheidend für die Auswahl ist die Tragweite einer Fehlentscheidung.

Beispiel:

H_0 : Die Nullhypothese lautet: Ein Bauteil hat keinen Defekt.
Der α-Fehler beschreibt das Risiko dies fälschlicherweise abzulehnen.
Folge wenn das Risiko einer Fehlentscheidung eintritt: Das Bauteil wird unberechtigt getauscht, es entstehen unnötige Kosten.

H_1 : Die Alternativhypothese lautet: Ein Bauteil hat einen Defekt.
Der β-Fehler beschreibt das Risiko dies fälschlicherweise abzulehnen.
Folge wenn das Risiko einer Fehlentscheidung eintritt: Das Bauteil wird nicht getauscht, der Fehler bleibt bestehen und der Kunde reklamiert erneut.

Merke:

⇨ Der α-Fehler beschreibt das Risiko einen „Effekt“ anzunehmen, den es gar nicht gibt.

⇨ Der β-Fehler beschreibt das Risiko einen „Effekt“ zu übersehen.

Literatur

Taschenbuch der statistischen Qualitäts- und Zuverlässigkeitsmethoden

Die wichtigsten Methoden und Verfahren für die Praxis.

Beinhaltet statistische Methoden für Versuchsplanung & Datenanalyse, sowie Zuverlässigkeit & Weibull.

- Statistische Verteilungen und Tests & Mischverteilungen
- Six Sigma Einführung und Zyklen
- Systemanalysen Wirkdiagramm, FMEA, FTA, Matrizen-Methoden
- Shainin- und Taguchi-Methoden
- Versuchsplanung DoE, D-Optimal
- Korrelations- und Regressionsverfahren
- Multivariate Datenauswertungen
- Prozessfähigkeit – Messmittelfähigkeit MSA 4 und VDA 5
- Regelkarten
- Toleranzrechnung und Monte-Carlo-Simulation
- Statistische Hypothesentests
- Weibull und Lebensdaueranalysen
- Stichprobengröße

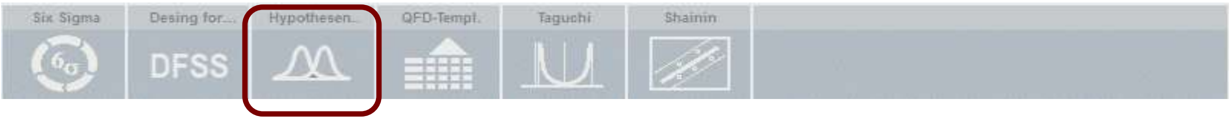
190 Seiten, Ringbuch

ISBN: 978-3-00-043678-9

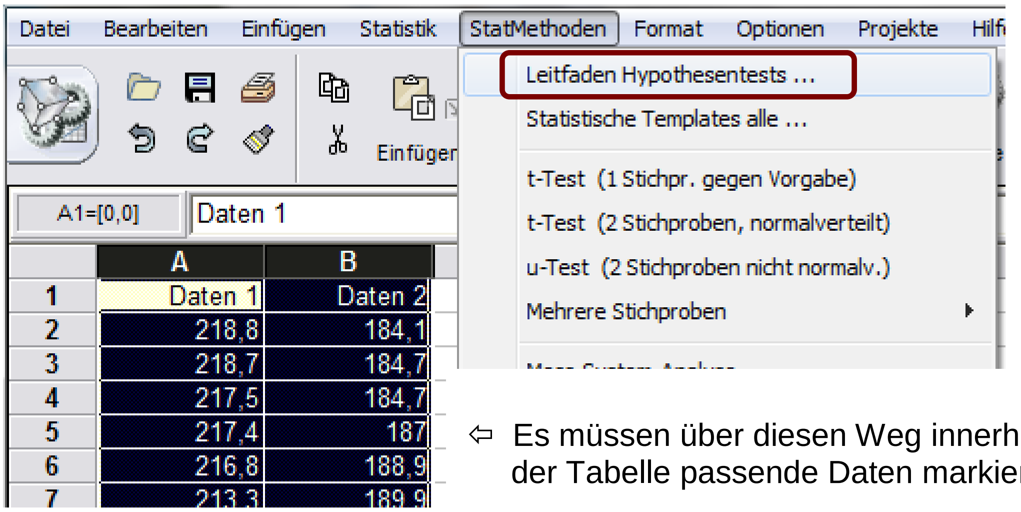
Anwendung in Visual-XSel 14.0

www.crgraph.de

Hypothesentests werden in Visual-XSel über Templates bereitgestellt. Diese können z.B. über den Leitfaden ausgewählt werden,



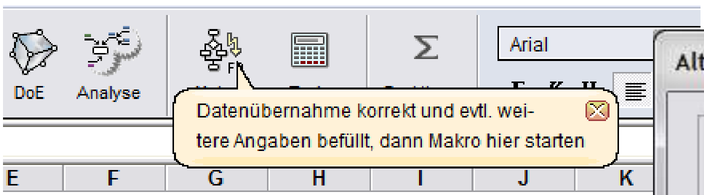
oder über den Menüpunkt *StatMethoden*

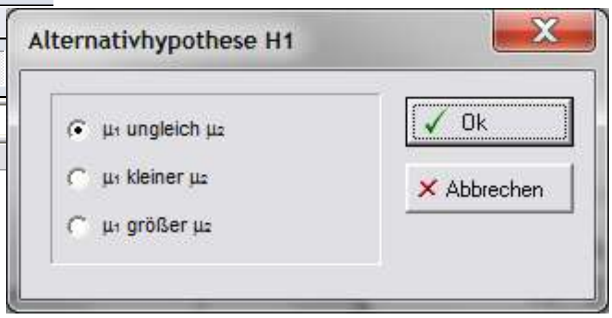


⇦ Es müssen über diesen Weg innerhalb der Tabelle passende Daten markiert sein.

Anstelle des Leitfadens kann auch ein entsprechender Test im Menü direkt gewählt werden. Es folgt die Auswahl für quantitative metrisch oder diskrete Merkmale:

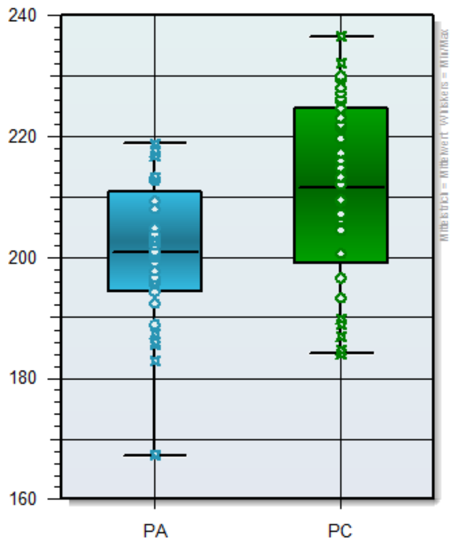
In die bestehende Datei wird das Template für den Mittelwertest in diesem Beispiel eingebettet und die Daten aus dem markieren Bereich verwendet. Im folgendem ist das Makro zu starten:





Als nächstes ist die Alternativhypothese auszuwählen

Das Ergebnis ist wie folgt:



Auszug aus Daten

PA	PC
167,2	184,1
167,5	184,7
182,9	184,7
185,5	187
186	188,9
187,4	189,9
188,9	193,3
192,4	196,5
194,3	200,6
195,6	204,5
196,1	205,7
196,7	206,2
197,7	206,8
199,1	207,1
200	209,2
200,5	209,5
200,9	212
202	213,2
202,6	214,8
203	215,9
203,5	217,2
203,8	219,6
204,8	221,3
208	221,9
209,3	223
212,6	224,6

t_Prüf	3,11
t_krit	1,99
Mittelwert M1	200,860
Mittelwert M2	211,509
Signifikanz (alpha)	0,05
p-value	0,003
beta-Risiko	0,136
Power	0,864

Ho : M1=M2 versus H1 : M1<>M2
Ho wird zu Gunsten H1 verworfen.

Die Varianzen sind gleich (p_val =0,362)

PA	normalverteilt
PC	normalverteilt

Hinweis: Sind die Daten nicht normalverteilt, so ist der u-Test von Wilcoxon zu verwenden

Ist p-value < Signifikanz so wird die Nullhypothese Ho verworfen.

Das beta-Risiko ist die Wahrscheinlichkeit einen Unterschied (Effekt) zu übersehen (Alternativhypothes fälschlicherweise abzu-lehnen). Power ist die Teststärke = 1-β