

Voraussetzung und verwandte Themen

Für diese Beschreibungen sind Grundlagen der Statistik und insbesondere der statistischen Verteilungen vorteilhaft. Weiterführende Themen sind:

www.versuchsmethoden.de/Verteilungstests.pdf

www.versuchsmethoden.de/Prozessfähigkeit.pdf

www.versuchsmethoden.de/Mischverteilung.pdf

Einführung

Die Normalverteilung stellt die häufigste und gängigste Form der Wahrscheinlichkeitsverteilung dar. Sie tritt auf, wenn zufällige Ereignisse auf einen Prozess wirken. Viele natur-, wirtschafts- und ingenieurwissenschaftliche Vorgänge lassen sich durch die Normalverteilung entweder exakt oder wenigstens in sehr guter Näherung beschreiben (vor allem Prozesse, die in mehreren Faktoren unabhängig voneinander in verschiedene Richtungen wirken).

Ziel und Nutzen

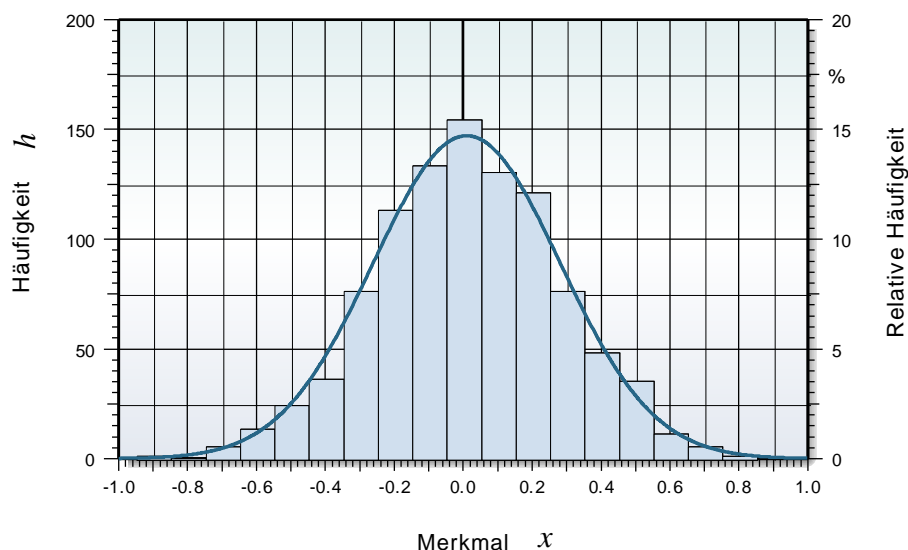
Mit der Normalverteilungen können z.B. für bestimmte Eigenschaftsmerkmale, wie dem Durchmesser einer Welle, die Wahrscheinlichkeit für bestimmte Werte ermittelt werden. Im Fall einer Fertigung einer Welle, kann damit berechnet werden, wie viele Teile außerhalb einer Spezifikation liegen (Prozessfähigkeit).

Grundlagen

Im Histogramm werden die Daten in passende Klassen eingeteilt und gezählt, wie viele sich darin befinden. Die Gaußkurve stellt die ideale Wahrscheinlichkeitsdichte für dieses Histogramm dar und beschreibt den Verlauf, wenn man „unendlich“ viele Daten hätte.

$$h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

x : Variable Merkmal
 \bar{x} : Mittelwert
 s : Standardabweichung



Normalverteilung

Die Gaußkurve hat zwei Parameter, den Mittelwert und die Standardabweichung, ein Maß der Streuung, das die „Breite“ der Gaußkurve beschreibt.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Da für die quadrierten Abweichungen der Mittelwert benötigt wird, der aus den gleichen Daten stammt, muss man für eine Stichprobe einen sogenannten Freiheitsgrad abziehen (der Mittelwert ist aufgrund einer begrenzten Stichprobe fehlerbehaftet). Deshalb steht im Nenner $n-1$ statt nur n .

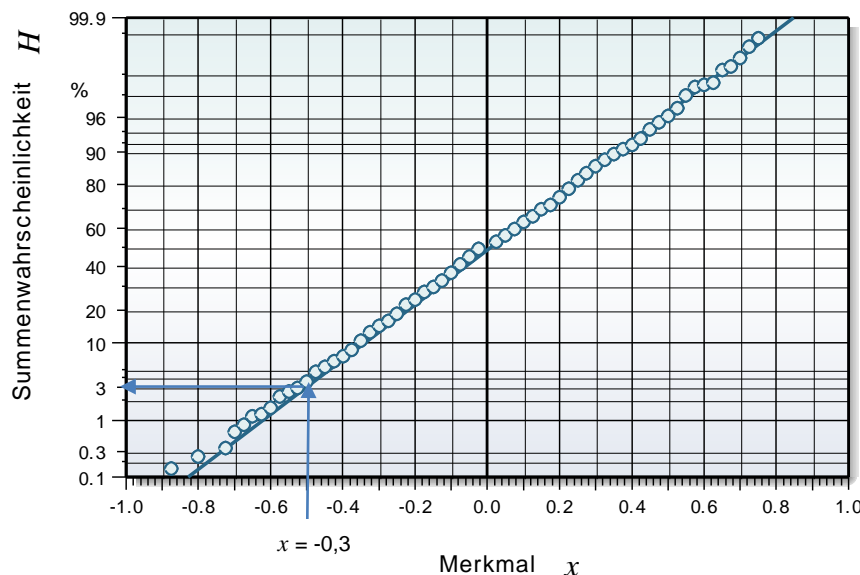
Für die Darstellung müssen die Daten in Klassen aufgeteilt werden, die eine konstante Breite haben sollten (*KlBr*). Empfohlen wird hierzu folgende Beziehung nach Sturges:

$$KlBr = (Max - Min) / (1 + 3,32 * \log(n))$$

- n : Anzahl Daten
- Max : größter vorkommender Wert
- Min : kleinster vorkommender Wert

Die berechnete Klassenbreite ist vorteilhafterweise auf- oder abzurunden.

Im sogenannten Wahrscheinlichkeitsnetz unten kann man im Maßstab der Y-Achse ablesen wie viele Daten in Summe von links bis zu einem Wert x vorliegen. Dies ist die Fläche unter der Gaußkurve. Im Beispiel haben 3% einen Wert von $x \leq -0,3$.



$$H = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2} dx$$

Integral ist hier nicht lösbar

Der Mittelwert liegt im Wahrscheinlichkeitsnetz bei 50% (hier bei Merkmal $x = 0$).

Im Wahrscheinlichkeitsnetz wird keine Klassierung benötigt, alle Datenpunkte können mit ihren Häufigkeiten direkt dargestellt werden. Diese Häufigkeiten berechnet man näherungsweise mit:

$$H = \frac{2i-1}{2n} \cdot 100\% \quad \text{mit } i = \text{Ordnungszahl der sortierten Werte}$$

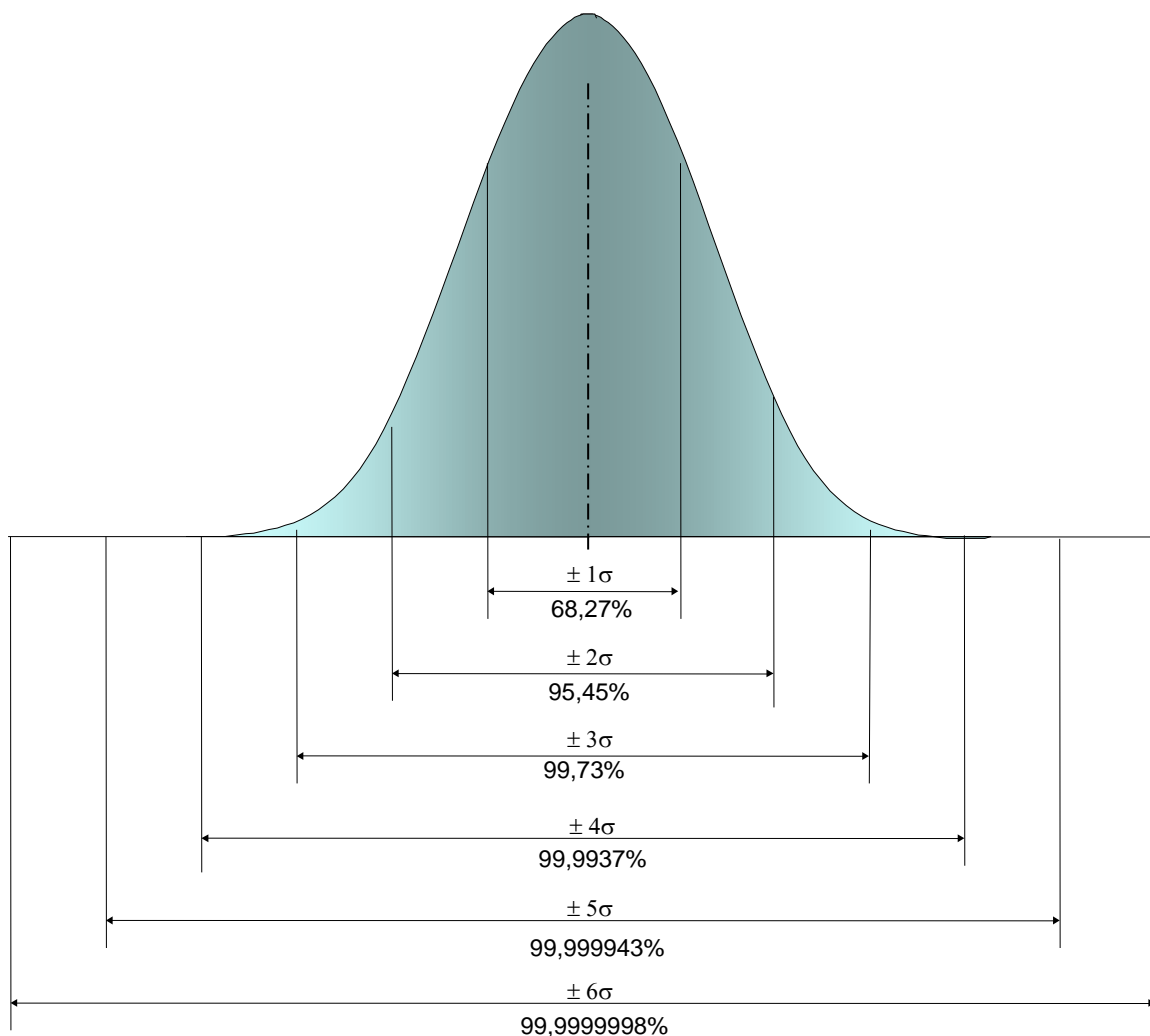
Die Steigung der Gerade ist durch die Standardabweichung der Daten bestimmt.

Normalverteilung

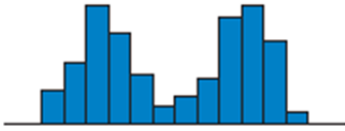
Mittelwert \pm Standardabweichung liegen im Bereich von 16% bis 84%. Weitere Bereiche sind auf der folgende Seite dargestellt, wobei hier σ = Standardabweichung der Grundgesamtheit ist.

Beide Darstellungsformen haben ihre Vorteile. Im Histogramm können Mischverteilungen gut erkannt werden, wenn mehrere Gipfel vorliegen. Im Wahrscheinlichkeitsnetz sieht man jeden Datenpunkt und Abweichungen von der Geraden sind Abweichungen von der Normalverteilung.

Normalverteilung und Häufigkeiten innerhalb der Standardabweichungen



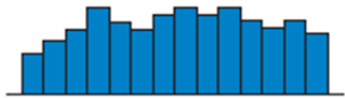
Abweichungen von der Normalverteilung



Zweigipflige Verteilung

Tal in der Mitte -> Kombination aus zwei Normalverteilungen.

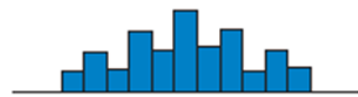
Ursache: Mischverteilung aus zwei Prozessen.
Abhilfe: Gruppenbildung und Aufteilung in die beiden Einflussgrößen.



Rechteckverteilung

Mehr oder weniger flach ohne ein ausgeprägtes Maximum.

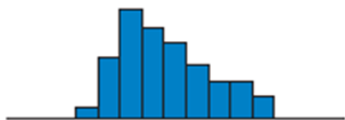
Ursache: Vermengung mehrerer Verteilungen.
Abhilfe: Aufteilung in Einflussgrößen mit Hilfe einer Systemanalyse.



Kammförmige Verteilung

Abwechselnd große und kleine Häufigkeiten.

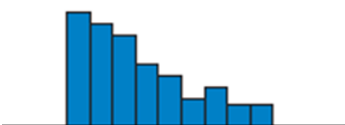
Ursache: Oft Mess-, Rundungs- oder Klassierungsfehler.
Abhilfe: Messbereiche überprüfen oder kleinere Klassenbreite verwenden.



Schiefe Verteilung

Unsymmetrischer Verlauf mit kurzem und langem Ende.

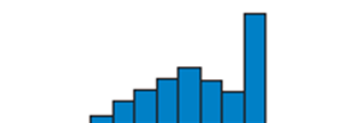
Ursache: Natürliche Begrenzung links gegen 0 und große Werte sind seltener.
Abhilfe: Logarithmieren der Werte führt meist wieder zu einer Normalverteilung.



Gestutzte Verteilung

Unsymmetrische einseitig abrupt abfallende Seite.

Ursache: Abgeschnittene Verteilung durch Aussortierung.
Abhilfe: Prozess und Notwendigkeit der Aussortierung überprüfen (Kosten).



Randgipflige Verteilung

Häufung einer am Rand liegenden Gruppe.

Ursache: Zuordnung aller rechts liegenden Messungen in eine Gruppe.
Abhilfe: Klärung der Datenklassierung oder einer Sortierung.

Normalverteilung

Anwendung in Visual-XSel 14.0

www.crgraph.de

Als Beispiel für die Darstellung einer Mischverteilung wird hier ein Histogramm gezeigt. Alternativ kann das Wahrscheinlichkeitsnetz (Normal-Vertl.) oder die Weibull-Verteilung gewählt werden. Letztere ist für Lebensdaueruntersuchungen zu verwenden.

The screenshot shows the Visual-XSel 14.0 interface. The main window displays a spreadsheet with data in column A. A 'Diagramm' menu is open, showing various chart options. The 'Histogramm' option is highlighted with a red box. The 'Auswahl' button in the top toolbar is also highlighted with a red box.

	A	B	C	D
1				
2	30,0414			
3	30,041			
4	30,0451			
5	30,0465			
6	30,0401			
7	30,039			
8	30,0387			
9	30,0432			
10	30,0462			
11	30,0414			

The 'Häufigkeitsverteilung' dialog box is shown. The 'Normalverteilung' option is selected in the 'Dichtefunktion' dropdown menu. The 'Darstellung' section shows 'Standard' as the selected chart type. The 'Limits' section shows a normal distribution curve with x_1 and x_2 marked. The 'Überschreitungsanteil' section shows 'über Funktion berechnen' as the selected option.

Klassenbreite : 0,02

Angaben

- Verteilungskurve
- Dichtefunktion: **Normalverteilung**
- Verteilungsparameter über Diagramm

Wahrscheinlichkeiten

- Häufigkeiten aus Anzahl Werte
- Einzelhäufigkeiten in 2. Spalte vorgeben

Verteilungstest

kein Test

$P_{value} < 0,05$: Daten entsprechen nicht gewählter Verteilung

Darstellung

- Standard
- Gestapelt

Limits

löschen

Überschreitungsanteil

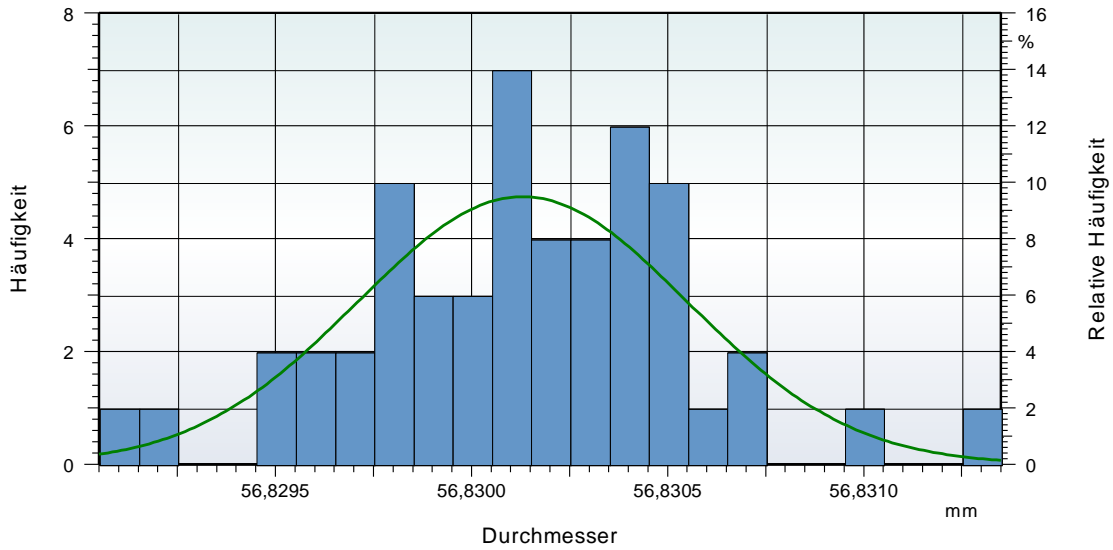
- über Funktion berechnen
- aus Daten ausgezählt (z.B. bei nicht normalvert. Daten)
- Zeige Prozessfähigkeit Cpu/Cpo

OK Diagrammauswahl Hilfe

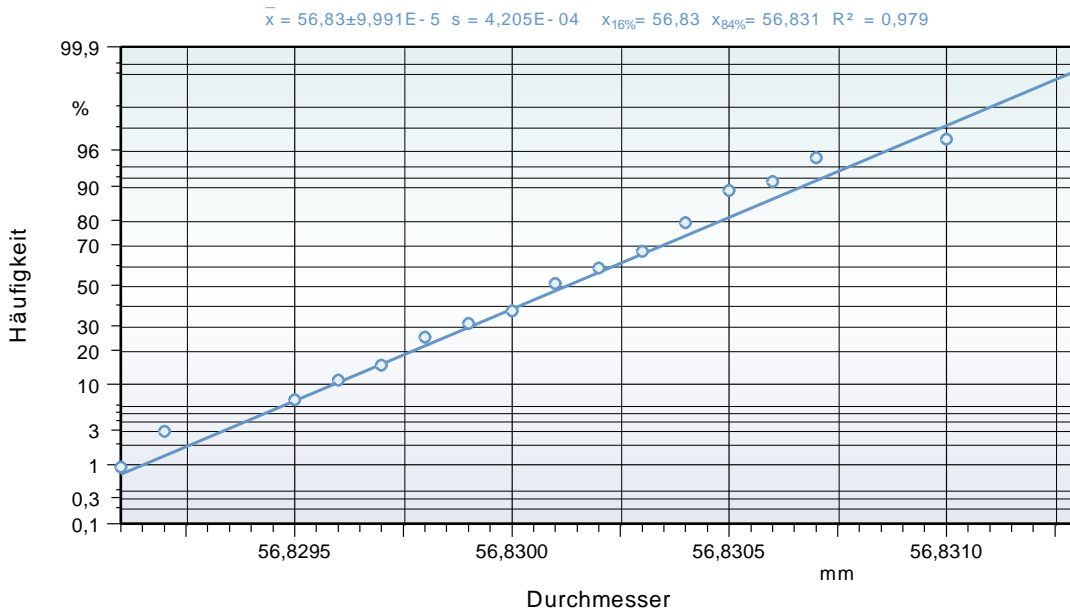
Normalverteilung

$$\bar{x} = 56,83013 \quad s = 0,00042052 \quad \text{KlassBr} = 0,0001$$

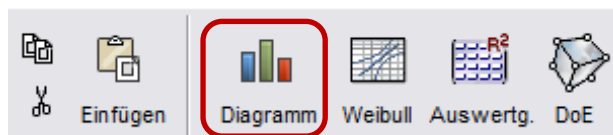
$$h = 100\% \cdot \frac{\text{KlassBr}}{s \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x - \bar{x})^2}{2 \cdot s^2}}$$



Als Wahrscheinlichkeitsnetz mit einer 8-parametrigem Normalverteilung sieht das gleiche Beispiel folgendermaßen aus:

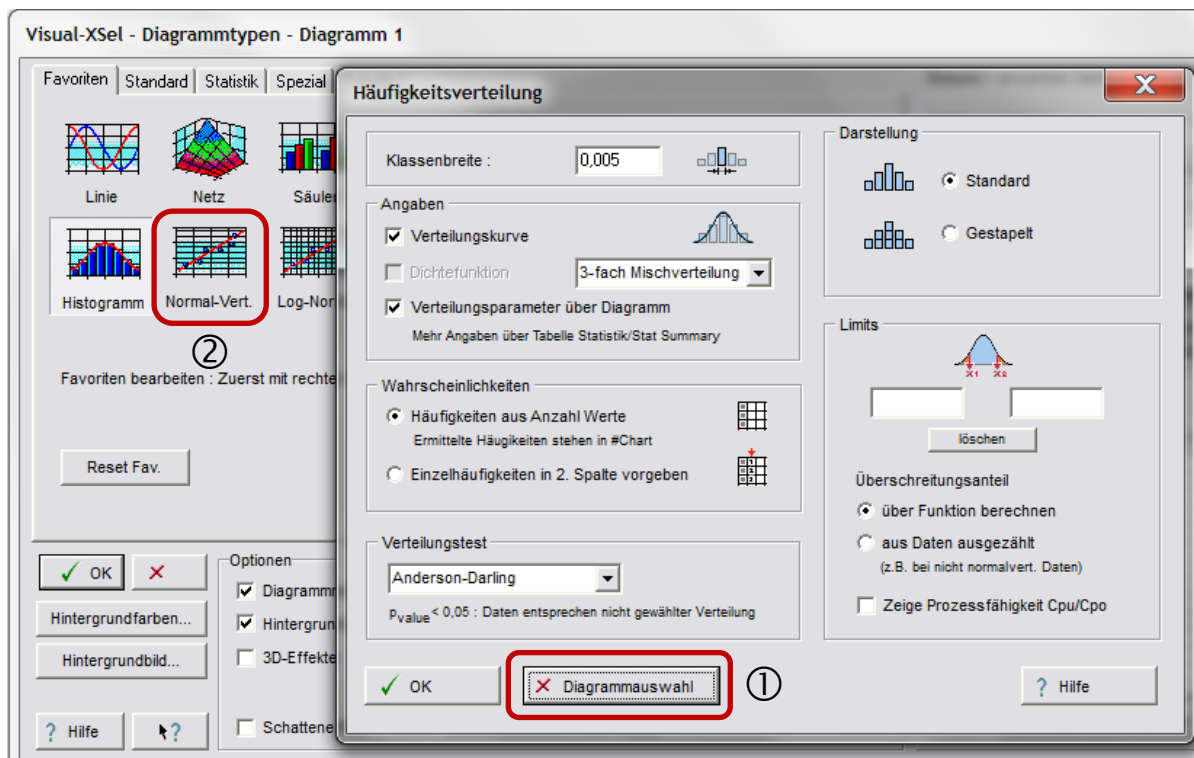


Hierzu ist die Diagrammikone erneut zu klicken



Zunächst erscheint automatisch wieder die Dialogbox des Histogramms, das durch die Taste **Diagrammauswahl** zu schließen ist.

Normalverteilung



Danach wechseln Sie in die Normalverteilung und wählen die entsprechenden Optionen.

Literatur

Taschenbuch der statistischen Qualitäts- und Zuverlässigkeitsmethoden

Die wichtigsten Methoden und Verfahren für die Praxis.

Beinhaltet statistische Methoden für Versuchsplanung & Datenanalyse, sowie Zuverlässigkeit & Weibull.

- Statistische Verteilungen und Tests & Mischverteilungen
- Six Sigma Einführung und Zyklen
- Systemanalysen Wirkdiagramm, FMEA, FTA, Matrizen-Methoden
- Shainin- und Taguchi-Methoden
- Versuchsplanung DoE, D-Optimal
- Korrelations- und Regressionsverfahren
- Multivariate Datenauswertungen
- Prozessfähigkeit – Messmittelfähigkeit MSA 4 und VDA 5
- Regelkarten
- Toleranzrechnung und Monte-Carlo-Simulation
- Statistische Hypothesentests
- Weibull und Lebensdaueranalysen
- Stichprobengröße

190 Seiten, Ringbuch

ISBN: 978-3-00-043678-9

