Voraussetzung und verwandte Themen

Für das Verständnis dieser Beschreibung sind Grundlagen der Statistik erforderlich, insbesondere über die Normalverteilung und über Hypothesentests:

www.versuchsmethoden.de/Normalverteilung.pdf

www.versuchsmethoden.de/Hypothesentests.pdf

Einführung

Die Poisson-Verteilung, benannt nach dem Mathematiker Siméon Denis Poisson, ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung insbesondere für das Eintreten von seltenen Ereignissen. Sie ist eine diskrete Verteilung, d.h. sie gilt nur für ganzzahlige Argumente x.

Ziel und Nutzen

Hier soll die Anwendung der Poisson-Verteilung für die Auftretenswahrscheinlichkeit von Fehlern beschrieben werden. Gegenüber der Binomial-Verteilung ist hier der Vorteil, dass mehrere Fehler je Einheit möglich sind, was aber keine Voraussetzung für die Anwendung ist. Die Fehler müssen jedoch unabhängig voneinander auftreten.

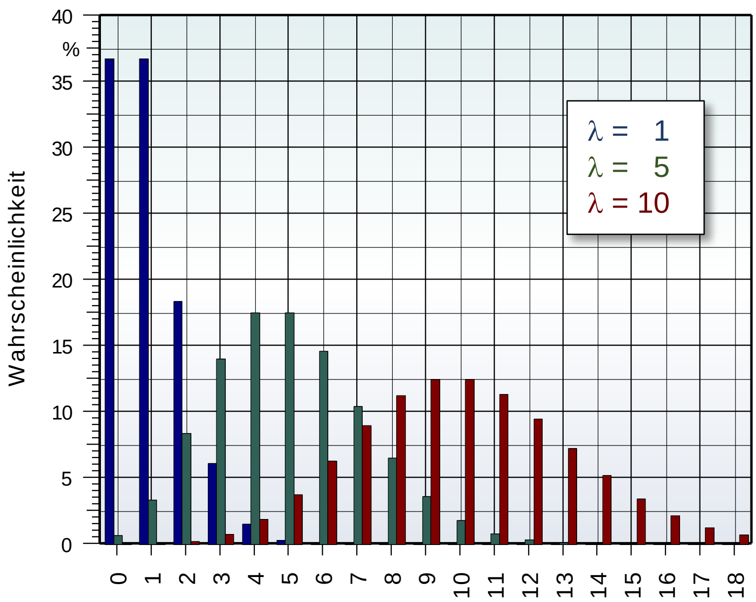
Grundlagen

Die Poisson-Verteilung hat einen Parameter, der allgemein eine Ereignisrate λ ist und im speziellen für Qualitätsthemen die mittlere Fehlerrate darstellt. Nicht zu verwechseln ist diese mit der Ausfallrate in der Exponential-Verteilung und dem gleichen Formelzeichen. Bei der Nennung von Ereignissen (Fehlern) ist ein bestimmter Beobachtungszeitraum notwendig, der bei Vergleichen dieselbe Basis haben muss.

Die Wahrscheinlichkeit für x Fehler in diesem Beobachtungszeitraum ist:

$$g(x) = \frac{\lambda^x}{x!}\, e^{-\lambda}$$

x : Anzahl Fehler 0, 1, 2 … ganzzahlig



Die rechte Darstellung zeigt die Wahrscheinlichkeit für verschiedene λ. Beispiel: Im folgenden Fall werden über einen bestimmten Zeitraum 3 Fehler festgestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für genau $x = 3$ Fehler bei $\lambda = 5$.

$$g(3) = \frac{5^3}{3!}\, e^{-5} = 14\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass hier kein Fehler vorkommt ist:

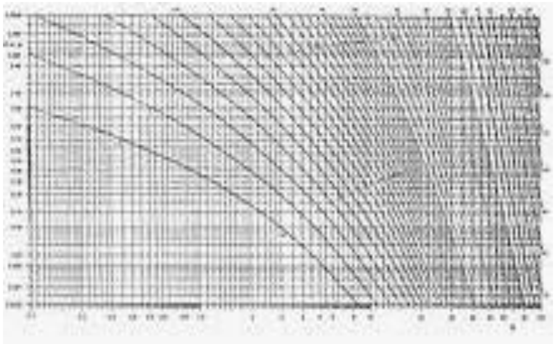
$$g(0) = \frac{5^0}{0!}\, e^{-5} = 0{,}7\%$$

Die Verteilungsfunktion (kumulativ) für 0 bis zu x Fehlern lautet:

$$G(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Für das vorherige Beispiel wäre die Frage, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für x = 0, 1, 2 oder 3 Fehler:

$$G(3) = e^{-5} \left[\frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!}\right] = 26{,}5\%$$



Eine grafische Darstellung dieser Wahrscheinlichkeit ist das sogenannte Thorndike-Nomogramm, siehe Bild rechts.

Eine andere Definition der Fehlerrate ist eine relative Betrachtung auf einen Stichprobenumfang bezogen

$$\lambda' = \frac{\text{Anzahl Fehler}}{\text{Stichprobengröße} \cdot \text{Fehlermöglichkeiten je Einheit}} = \frac{x}{n \cdot m} = \frac{x}{N}$$

Die Fehlermöglichkeiten je Einheit können auch 1 sein. Gibt es mehrere, so ist die Voraussetzung, dass diese voneinander unabhängig und alle Poisson-verteilt sind mit vergleichbaren λ. Ein Beispiel folgt unter Hypothesentests. Die relative Ausfallrate λ‘ kann nicht direkt in die Poisson-Verteilung eingesetzt werden.

Vertrauensbereich

Der Vertrauensbereich beschreibt in welchem Bereich sich Fehler in der Grundgesamtheit befinden werden. Bei einem üblichen Vertrauensbereich von 90% ist die Irrtumswahrscheinlichkeit α = 10%. Der zweiseitige Vertrauensbereich für die Anzahl Fehler x ist:

$$\frac{1}{2}\,\chi^2_{\frac{\alpha}{2},2x} \leq x \leq \frac{1}{2}\,\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},2(x+1)}$$

Es können hier rechnerisch nicht ganzzahlige Wertebereiche entstehen. Für die relative Fehlerrate λ‘ ist jede Seite auf $N = n \cdot m$ zu beziehen und es gilt:

$$\frac{1}{2\,N}\,\chi^2_{\frac{\alpha}{2},2x} \leq \lambda' \leq \frac{1}{2\,N}\,\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},2(x+1)}$$

Hinweis: Zu bemerken ist hier, dass der Vertrauensbereich nur von x abhängt, aber nicht von λ‘.

Die untere und obere Vertrauensgrenze für die einseitige Betrachtung ist:

$$\lambda'_{un} = \frac{1}{2\,N}\,\chi^2_{\alpha,2x} \quad \text{bzw.} \quad \lambda'_{ob} = \frac{1}{2\,N}\,\chi^2_{1-\alpha,2(x+1)}$$

Ein Beispiel folgt im Folgenden Kapitel.

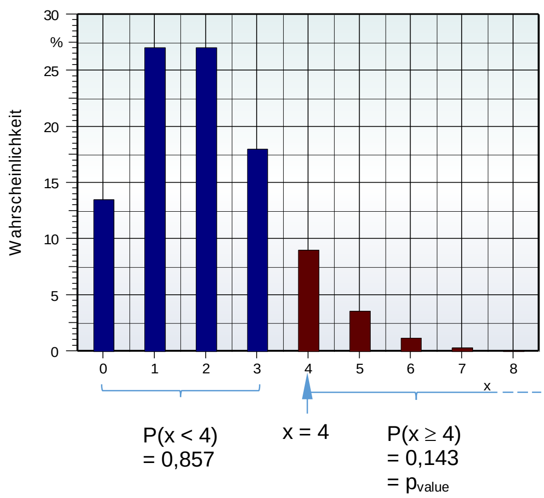
Hypothesentests

Vergleich einer aktuellen Anzahl Fehler zu einem erwarteten Vorgabewert

In einer Produktion für Elektronik ist bekannt, dass im Durchschnitt λ' = 0,5% Fehler auftreten. Je Einheit sind $m = 5$ Fehlermöglichkeiten gegeben, mit vergleichbarer Ausfallwahrscheinlichkeit (Kontaktproblem, Schalter, Kondensator, Diode und Endstufe defekt). Es wird eine Stichprobe von $n = 80$ Teile überprüft, in der insgesamt $x = 4$ Fehler entdeckt wurden. Die Frage ist, ob diese Stichprobe schlechter ist, als die erwartete Fehlerrate?

Gegeben ist $m = 5$; $n = 80$ ⇨ $N = m \cdot n = 5 \cdot 80 = 400$; $x = 4$. Die erwartete Fehlerrate ist $\lambda' = 0{,}005$ und somit ist $\lambda = N \cdot \lambda' = 400 \cdot 0{,}005 = 2$. Im Folgenden sei X eine poissonverteilte Zufallsvariable. Allgemein gilt dann:

$$P(X < x) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{x-1} \frac{\lambda^k}{k!}$$



Konkret werden die Wahrscheinlichkeiten nun aufgeteilt in $X \geq 4$ und in $X < 4$, siehe Grafik rechts. Für $X < 4$ ist die Wahrscheinlichkeit:

$$P(X < 4) = e^{-2}\left[\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}\right] = 0{,}857$$

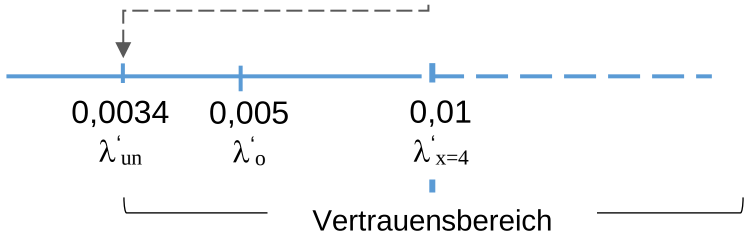
und für $X \geq 4$ entsprechend:

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 0{,}143.$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist auch der sogenannte p_{value} für die Nullhypothese H_0: $x \leq x_o$, wobei hier $x_o = \lambda = 2$ ist. Diese Nullhypothese wäre abzulehnen, wenn der p_{value} kleiner als das festgelegte Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ ist. Für das Beispiel ist also nicht zu erwarten, dass die Stichprobe schlechter ist, als die erwartete Fehlerrate. Ansonsten wäre die Alternativhypothese $H_1 : x > x_o$ „anzunehmen". Bei mehr als 4 Fehlern reduziert sich der p_{value} immer weiter (rote Balken werden kleiner), bis H_0 abgelehnt werden muss.

Der untere Vertrauensbereich für $x = 4$, $\lambda'_{x=4} = 0{,}01$ und 95% Vertrauensbereich ⇨ $\alpha = 5\%$

$$\lambda'_{un} = \frac{1}{2\,N}\,\chi^2_{\alpha,2x} = \frac{1}{2 \cdot 400}\,\chi^2_{0.05,2\cdot 4} = 0{,}0034$$



Da der Vertrauensbereich die erwartete Fehlerrate von 0,005 beinhaltet (hier als λ'_o bezeichnet), kann eine gleichbedeutende Nullhypothese $H_0 : \lambda' \leq \lambda'_o$ ebenfalls nicht verworfen werden.

Hinweis:
Hier wurde ein konkreter Stichprobenumfang n und die Anzahl Fehlermöglichkeiten m

genannt. Alternativ könnte hier auch ein Beobachtungszeitraum t_o verwendet werden, bei dem dann $x_o = \lambda = 2$ festgestellt werden musste, um auf das gleiche Ergebnis zu kommen, das davon abhängig ist, wie man den Beobachtungszeitraum wählt. Ist die zu testende Anzahl Fehler x in einem anderem Zeitumfang beobachtet worden, als die Bezugsgröße x_o, so muss eine Anpassung erfolgen ⇨ $\lambda = x_o \cdot t / t_o$.

Ab $x > 100$ gibt es je nach verfügbaren Zahlenformat Probleme mit dem darstellbaren Zahlenformat (ab $x = 70$ ist $x! > 1E100$). Dies ist z.B. der Fall, wenn ein großer Beobachtungszeitraum gewählt wurde. Hier muss über eine Näherung der Normalverteilung gearbeitet werden:

$$P(X \geq x_o) \approx 1 - \Phi(z) \qquad \text{mit } z = \left(\frac{|x - x_o| - 0{,}75}{\sqrt{x_o}}\right)$$

Die Voraussetzung ist hier, dass, $x \geq 9$ bzw. $\lambda \geq 9$ ist. Dann wird die Poisson-Verteilung näherungsweise symmetrisch, siehe rote Balken im ersten Bild auf Seite 1. Φ steht für die normierte Normalverteilung, also für μ=0 und σ =1. Die Korrektur von -0,75 ist in mancher Publikation nur -0,5 in anderen nicht zu finden. Simulationen im Entscheidungsbereich der Nullhypothese $\alpha = 0{,}05$ haben gezeigt, dass -0,75 zu einer bestmöglichen Anpassung an die exakte Berechnung führt.
Beispiel: Es werden in einer Produktion 20 Fehler in einer Produktionscharge (Beobachtungszeitraum) erwartet ⇨ x_o. Festgestellt wurden in einer Stichprobe (andere Charge) $x = 30$ Fehler. Die Näherung ergibt:

$$z = \frac{30 - 20 - 0{,}75}{\sqrt{20}} = 2{,}0684; \qquad P(30 \geq x_o) \approx 1 - \Phi(2{,}0684) = 0{,}019$$

Womit die Nullhypothese auf gleiche Anzahl Fehler abgelehnt werden muss. Der exakte Wert wäre 0,022 gewesen.

Für die Nullhypothese, ob die Stichprobe genau so viel Fehler hat, wie durch die bekannte Fehlerrate erwartet würde, gilt: H_0: $x = x_o$ und die Alternativhypothese ist H_1 : $x \neq x_o$. Die Wahrscheinlichkeit hierfür wird als Differenz zur nächst höheren Anzahl Fehler berechnet:

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda^k}{k!} - e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{x-1} \frac{\lambda^k}{k!} \approx \Phi\left(\frac{X - X_o + 0{,}25}{\sqrt{X_o}}\right) - \Phi\left(\frac{X - X_o - 0{,}75}{\sqrt{X_o}}\right)$$

Bei zu großen Werten ist wiederrum eine Näherung mit der Normalverteilung anwendbar, siehe rechte Beziehung in obiger Formel. Auch hier ist die Korrektur von -0,75 zu empfehlen, wobei die Korrektur im ersten Term wegen $x = x+1$ bei 0,25 liegt. Aufgrund der zweiseitigen Berechnung gilt:

$$P_{value} = 2 \cdot \mathrm{P(X = x)}$$

Für das Beispiel ergibt die exakte Berechnung und die Näherung in diesem Fall das gleiche Ergebnis mit $P_{value} = 0{,}0167$.

Sollen relative Fehlerraten verglichen werden, so ist hier die Stichprobengröße n bzw. N notwendig. Dabei dürfen nur „Systeme“ mit gleicher Anzahl Fehlermöglichkeiten m verglichen werden. Weiterhin ist für die Umrechnung in eine absolute Fehleranzahl x eine gleiche Stichprobengröße notwendig, d.h. $n = n_1 = n_2$
Zur Anwendung der vorher beschriebenen Methode über die Poisson-Verteilung gilt:

$x_1 = n \cdot m \cdot \lambda'_1$ und $x_2 = n \cdot m \cdot \lambda'_2$

Vergleich zweier relativer Fehlerraten λ‘

Analog zu den bisherigen Fragestellungen, ist hier die Nullhypothese H_0: $\lambda'_2 \leq \lambda'_1$ gegen die Alternativhypothese H_1: $\lambda'_2 > \lambda'_1$. In allen Formeln mit Bezug auf λ'_0 oder x_0 ist x durch x_2 und x_0 gegen x_1, bzw. λ' gegen λ'_2 und λ'_0 gegen λ'_1 auszutauschen.

Vergleich von x Fehlern aus mehreren Stichproben

Für die Nullhypothese, dass die Fehler aus mehreren Stichproben k gleich sind, wird hier über die χ^2 - Verteilung bestimmt:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\bar{x}} \qquad \text{mit} \qquad \bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i$$

und den Freiheitsgraden $f = m$-1

p_{value} = 1-Chi(χ^2; f)

Literatur

Hartung, Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik, 12. Auflage

Rinne, Taschenbuch der Statistik, 3. Auflage

Formelzeichen

α : Signifikanzniveau, normalerweise 0,05

f : Freiheitsgrade

n : Stichprobengröße bzw. Anzahl Einheiten für Betrachtung

N : Gesamtbezugsgröße = $n \cdot m$

m : Fehlermöglichkeiten pro Einheit

λ : Fehlerrate absolut ganzzahlig

λ' : relative Fehlerrate

p_{val} : Irrtumswahrscheinlichkeit für Nullhypothese

P : Wahrscheinlichkeit

x : Aktuell betroffene Anzahl Ereignisse bzw. Fehler

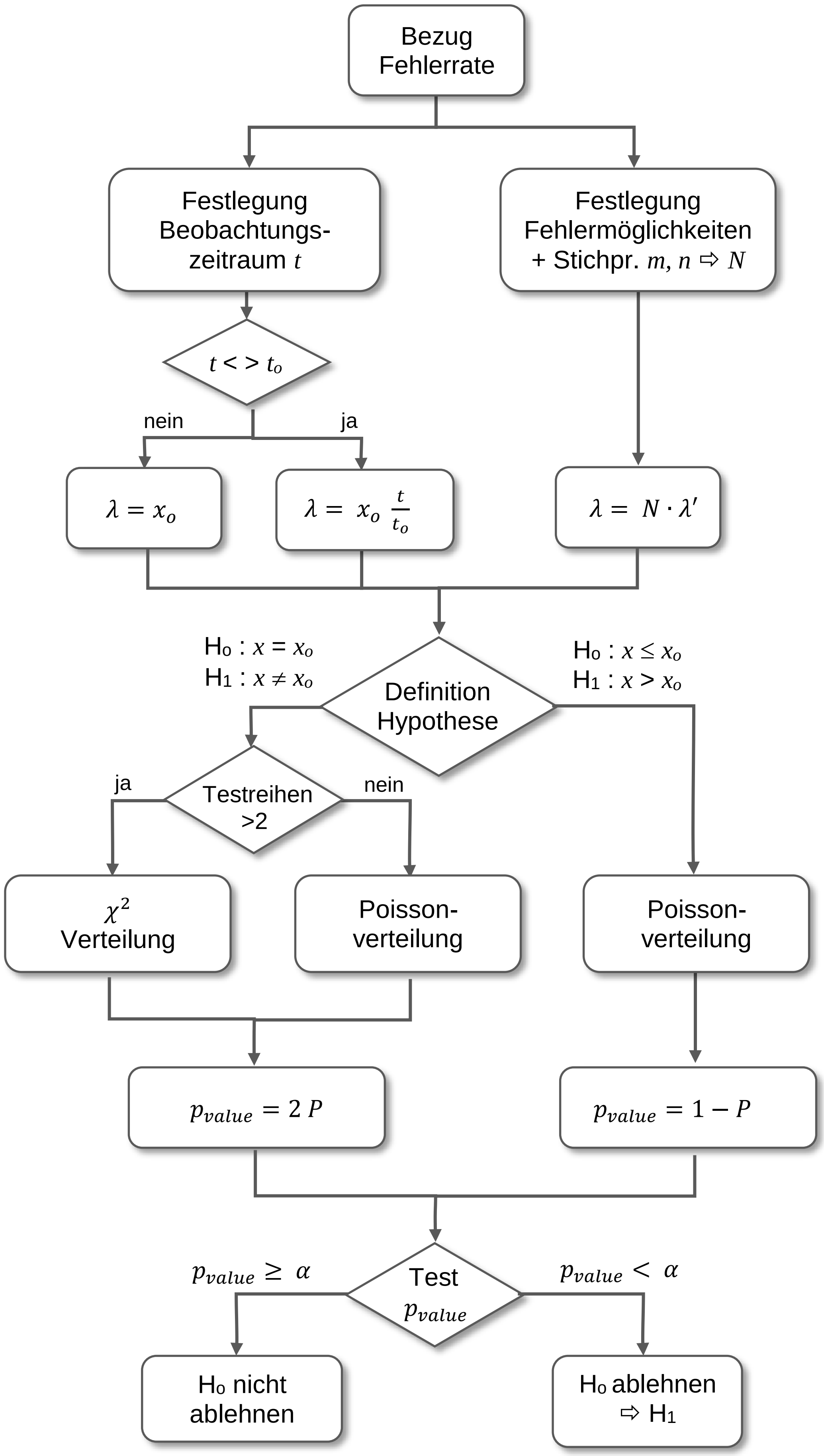
x_0 : Bezugs-Anzahl Ereignisse bzw. Fehler für Vergleich $x_0 = \lambda$

t : Zeitintervall für Beobachtung

t_o : Zeitintervall für Referenz bzw. Bezugs-Ereignisse x_0

Φ : Normierte Normalverteilung für Mittelwert = 0 und Standardabw. = 1

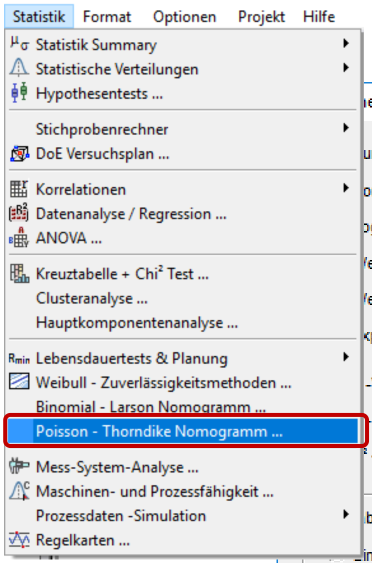
Ablauf Hypothesentests für Poisson-Prozess

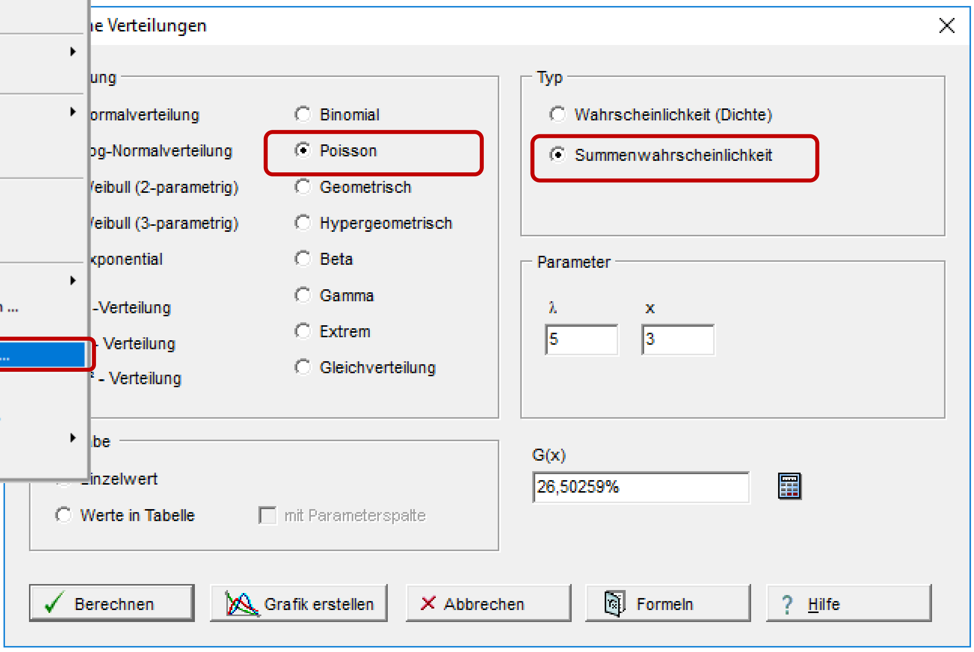


Anwendung in Visual-XSel 15.0 / 16.0

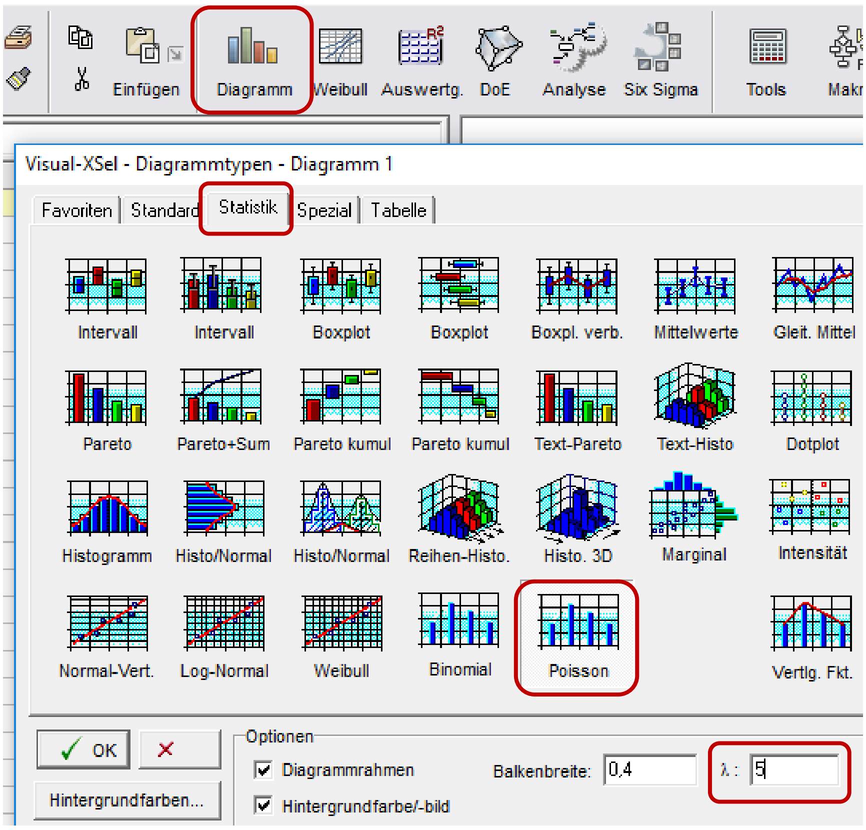
www.crgraph.de

Für das Beispiel mit der Frage, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für x = 0, 1, 2 oder 3 Fehler kann in Visual-XSel direkt über den Menüpunkt Thorndike-Nomogramm berechnet werden:



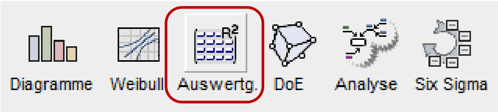


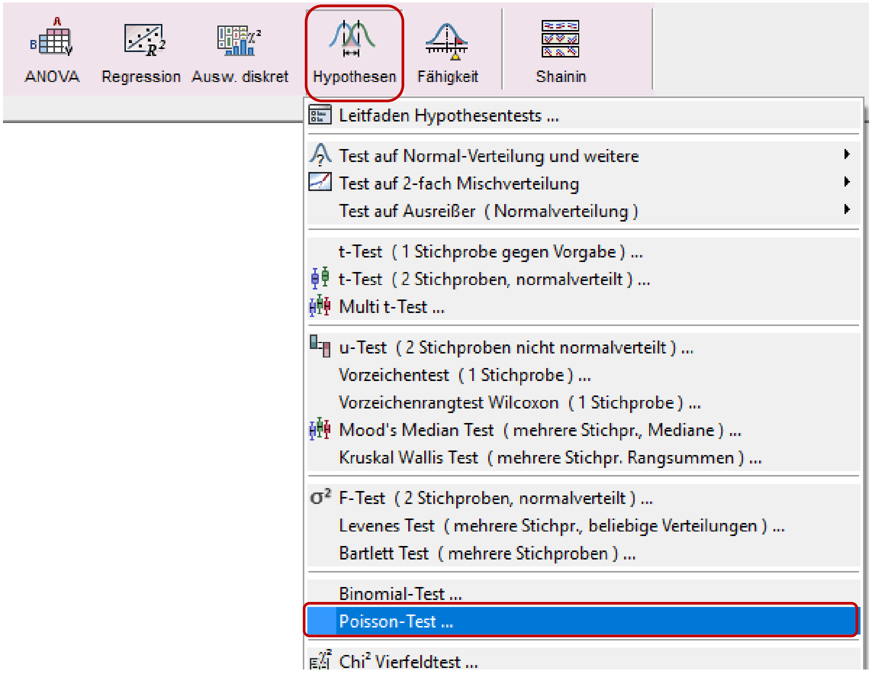
Eine Poisson-Verteilung kann auch wie folgt als Grafik erzeugt werden:



Hypothesentests mit V16.0

In Version 16.0 gibt es ein Template für die gezeigten Hypothesentests.





Starten Sie das Makro mit F9 und wählen die entsprechenden Optionen aus.