Prozessfähigkeit

Voraussetzung und verwandte Themen

Für diese Beschreibungen sind Grundlagen der Statistik und insbesondere der statistischen Verteilungen vorteilhaft. Weiterführende Themen sind:

www.versuchsmethoden.de/Mess-System-Analyse.pdf

www.versuchsmethoden.de/Regelkarten.pdf

Einführung

Die übergeordnete Begriff Prozessfähigkeit dient zur Beschreibung der aktuellen sowie der zukünftig zu erwartenden Leistung eines Prozesses. Man unterscheidet zwischen einer Kurzeitfähigkeit (Maschinenfähigkeit) und einer Langzeitfähigkeit (im eingeschränkten Sinn - Prozessfähigkeit).

Ziel und Nutzen

Man kann hiermit erkennen, ob ein Prozess für die Vorgaben geeignet ist. Hierzu ist eine Toleranzangabe notwendig, die den Rahmen einer erlaubten Abweichung vom Sollwert vorgibt. Die Kennzahl der Prozessfähigkeit C_{pk} bezieht die Toleranz auf die Streuung des Prozesses. Wird die Prozessfähigkeit nicht erreicht, so muss entweder die Streuung reduziert werden, oder man muss die Toleranzgrenzen erweitern. Hierzu ist es erforderlich, die möglichen Grenzen einer gewünschten Funktion zu kennen, ab wann es zu einer Störung kommen kann.

Grundlagen

Für den Bezug auf die Streuung wurde historisch festgelegt, dass 99,73% innerhalb der Toleranz liegen sollen, was ±3s bedeuten (s = Standardabweichung). Dies führt zu der allgemeinen Beziehung:

$$C_p = \frac{OTG - UTG}{6s} = \frac{T}{6s}$$

mit
UTG : untere Toleranzgrenze
OTG : obere Toleranzgrenze
T : Toleranz = *OTG-UTG*

Die Anforderung war zu Beginn der Industrialisierung $C_p \geq 1{,}0$. Später wurden die Prozesse besser und man konnte ±4s einhalten, was bedeutet, dass 99,9937% der Prozessergebnisse (z.B. Teile) innerhalb der Toleranz liegen. Man hat jedoch den Bezug aus Gründen der Vergleichbarkeit auf ±3s belassen und dafür die Anforderung

$C_p \geq 1{,}33$

definiert. Zur Berücksichtigung einer Mittelwertverschiebung (Abweichung von der idealen Prozesslage), wird der Wert C_{pk} eingeführt, der immer schlechter oder gleich groß ist wie C_p ($C_{pk} \leq C_p$). In der Regel gilt ein Prozess als fähig, wenn $C_{pk} \geq 1{,}33$ ist.

Im folgendem werden für verschiedene Verteilungsformen die Beziehungen dargestellt:

Normalverteilung

Die Normalverteilung ist anzuwenden, wenn Abweichungen vom Sollwert durch zufällige Einflüsse vorliegen, die additiv wirken. Es wird die bereits eingeführte

Beziehung angewendet:

$$C_p = \frac{OTG-UTG}{6s} = \frac{T}{6s}$$

$$C_{pu} = \frac{\bar{x}-UTG}{3s} \qquad C_{po} = \frac{OTG-\bar{x}}{3s}$$

$$C_{pk} = Min\left(C_{pu};C_{po}\right)$$

Ist der tatsächliche Mittelwert und die Standardabweichung bekannt, so ist μ und σ anstelle von $\bar{x}$ und s einzusetzen. Der C_{pk} - Wert kann über

$$C_{pk} = C_p\left(1-|z|\right)$$

berechnet werden, mit

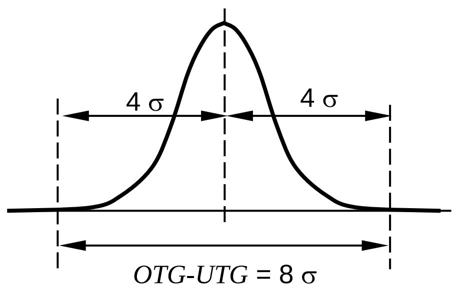
$$z = \frac{\bar{x}-(OTG+UTG)/2}{(OTG-UTG)/2}$$

für mittigen Sollwert

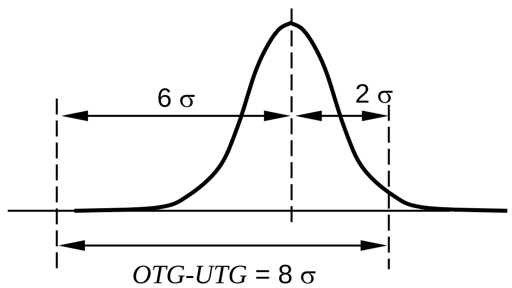
$$z = \frac{x_{soll}-\bar{x}}{(OTG-UTG)/2}$$

für nicht mittigen Sollwert

Beispiele:



C_p = 1,33 C_{pu} = 1,33 C_{po} = 1,33 C_{pk} = 1,33



C_p = 1,33 C_{pu} = 2,0 C_{po} = 0,67 C_{pk} = 0,67

Der Vertrauensbereich ist definiert nach Rinne /29/ über:

$$C_p = C_p\left(1 \pm \sqrt{\frac{\chi^2_{1-\alpha/2;\,\nu}}{n-1}}\right) \quad \text{mit} \quad \nu = n-1$$

$$C_{pk} = C_{pk}\left(1 \pm u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{2\,(n-1)} + \frac{1}{c_{pk}^2\,9\,n}}\right)$$

Lognormalverteilung

Die Lognormalverteilung ist anzuwenden, wenn die Verteilung links einseitig begrenzt ist, nur positive Werte vorkommen und Abweichungen vom Sollwert durch zufällige Einflüsse entstehen, die multiplikativ wirken.

$$C_p = \frac{\ln(OTG)-\ln(UTG)}{6\,s_{\log}}$$

Prozessfähigkeit

$$C_{pu} = \frac{\bar{x}_{\log} - \ln(UTG)}{3\,s_{\log}} \qquad C_{po} = \frac{\ln(OTG) - \bar{x}_{\log}}{3\,s_{\log}}$$

$$C_{pk} = Min\left(C_{pu}; C_{po}\right)$$

$$\bar{x}_{\log} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)\right) \qquad s_{\log} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(x_i) - \bar{x}_{\log}\right)^2}$$

Liegen die Einzelwerte nicht vor, so kann näherungsweise $\bar{x}_{\log}$ und $s_{\log}$ aus dem Mittelwert und der Standardabweichung der Normalverteilung mit

$$\bar{x}_{\log} \approx \ln(\bar{x}) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{s^2}{\bar{x}^2}\right) \qquad s_{\log} \approx \ln\left(1 + \frac{s^2}{\bar{x}^2}\right)$$

berechnet werden.

Betragsverteilung 1. Art

Diese ist anzuwenden wie bei der Normalverteilung, jedoch wenn die Verteilung einseitig begrenzt ist und nur positive Werte vorkommen können. Der Fähigkeitsindex wird über eine allgemeingültige Formel berechnet:

$$C_{pk} = \frac{1}{3} u_{1-p}$$

p = Anteil außerhalb der oberen Spezifikationsgrenze und u die Verteilungsform der standardisierten Normalverteilung.

Anstelle dieser Beziehung kann auch die weiter unten beschriebene Perzentil-Methode verwendet werden, was bei kleinen Überschreitungsanteilen p sinnvoll ist.

Betragsverteilung 2. Art (Rayleigh-Verteilung)

Die Anwendung dieser Verteilungsart ist z.B. für Unwuchten gegeben. Auch hier gilt die allgemeine Formel:

$$C_{pk} = \frac{1}{3} u_{1-p} \quad \text{mit} \quad p = e^{-\frac{\pi}{4}\left(\frac{OTG}{\mu r}\right)^2}$$

Verteilungsformen verschiedener Konstruktionsmerkmale

Die folgende Tabelle zeigt eine Übersicht, für welche Konstruktionsmerkmale welche Verteilung vorkommt:

N : Normalverteilung
B1 : Betragsnormal 1. Art
B2 : Betragsnormal 2. Art

Merkmal	Symbol	Verteilg.
Längenmaß	—	N
Geradheit	▱	B1
Ebenheit	○	B1
Rundheit	⌭	B1
Zylinderform	⌒	B1
Linienform	⌓	B1
Flächenform		B1
Rauheit		B1
Unwucht		B2
Parallelität	//	B1
Rechtwinkeligkeit	⊥	B1
Neigung / Winkeligkeit	∠	B1
Position	⌖	B2
Koaxialität, Konzentrizität	◎	B2
Symmetrie	⌯	B1
Rundlauf	↗	B1/B2
Planlauf	⌰	B1

Prozessfähigkeit

Verteilungsfreie Perzentil-Methode

Bei nicht bekannter Verteilung ist die so genannte Perzentil-Methode zu verwenden. Allgemein gilt:

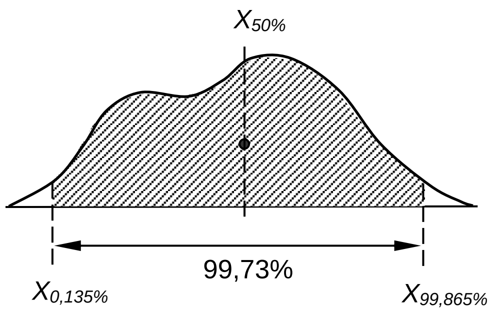
$$C_p = \frac{OTG - UTG}{X_{99,865\%} - X_{0,135\%}}$$

Für eine Normalverteilung entspricht der Nenner 6s. Für eine nicht normal verteilte Form kann der Bezugsbereich ermittelt werden, wie in der ISO/TR 12783 beschrieben.

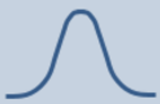
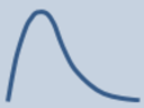
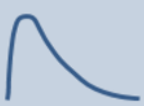
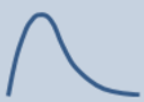
Analog zur Normalverteilung gilt:

$$C_{pu} = \frac{X_{50\%} - UTG}{X_{50\%} - X_{0,135\%}} \quad \text{und} \quad C_{po} = \frac{OTG - X_{50\%}}{X_{99,865\%} - X_{50\%}}$$

$$C_{pk} = Min(C_{pu}; C_{po})$$



Übersicht der wichtigsten Verteilungen

	Normal-verteilung	Betragsnor-malvertlg. B1	Betragsnor-malvertlg. B2	Log-Normal-verteilung	Weibull-verteilung	Misch-verteilung
Form						
Beispiel	Geometrische Dimensionen z.B. Durchmesser, Länge, etc.	Einseitig begrenzte Merkmale z.B. Rundheit, Parallelität	Einseitig begrenzte Merkmale z.B. Unwucht, Koaxialität	Einseitig begrenzte Merkmale z.B. Planlauf	Einseitig begrenzte Merkmale, z.B. mit Zeitbezug	Vermengung von Prozessschwankungen, z.B. Maschinen, Chargen, etc.
Param.	2-parametrig (Gauß-Standard)	Negative Anteile werden bei x=0 gespiegelt	entspricht Weibull-Verteilung mit b=2	2-parametrig	2-, oder 3-parametrig	Nur 3-fach Mischverteilung auf Basis anteiliger Normalvertlg. zulässig
Berechnung	Berechnung analytisch über μ + σ	Berechnung analytisch mit Faltung <> 0	Berechnung über Least-Square Δy	Berechnung analytisch über Median & Streufaktor	Berechnung über Least-Square Δy	Berechnung analytisch, Percentilmethode
Formel	$C_p = \frac{OSG - USG}{6s}$	$C_{pk} = Min\left(\frac{X_{50\%} - USG}{X_{50\%} - X_{0,135\%}}; \frac{OSG - X_{50\%}}{X_{99,865\%} - X_{50\%}}\right)$				

Prozessfähigkeit

Maschinenfähigkeitsuntersuchung (MFU)

Maschinenfähigkeitsuntersuchungen werden über einen kurzen Zeitraum durchgeführt. Damit gehen hier im Wesentlichen die Maschine und Methode ein. Einflüsse unterschiedlicher Materialien, Bediener oder Umgebungsbedingungen werden nicht berücksichtigt und sollen daher möglichst konstant sein. Die Formeln sind die gleichen, wie für die Prozessfähigkeit. Die Ergebnisse werden jedoch als $\boldsymbol{C_m}$ und $\boldsymbol{C_{mk}}$ bezeichnet. Empfohlener Stichprobenumfang ist 50 (Mindestumfang 20). Man spricht dabei auch von einer Kurzzeitfähigkeitsuntersuchung. Daraus resultieren auch die im Allgemeinen höheren Anforderungen an die Maschinenfähigkeitskennwerte ($C_m, C_{mk} \geq 1{,}67$).
Hinweis: Die Benennung C_m, C_{mk} ist in der neuen DIN/ISO Norm 21747 nicht mehr vorhanden, stattdessen werden die gleichen Benennungen P_p/P_{pk} oder C_p/C_{pk} verwendet.
Werden weniger Stichprobendaten, als die empfohlenen 50 verwendet, so gilt die Anforderung bezogen auf den unteren Vertrauensgrenzwert (Vertrauensbereich 95%, Tabelle analog VDI/VDE 2645):

$$c_{mk} \geq 1{,}67 \frac{\left(1+\frac{1}{2\,n}\right)\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{n-1,\alpha}}}}{\left(1+\frac{1}{2\,n_{soll}}\right)\sqrt{\frac{n_{soll}-1}{\chi^2_{n_{soll}-1,\alpha}}}}$$

mit $n_{soll} = 50$

n	C_{mk}
20	1,93
25	1,85
30	1,79
35	1,75
40	1,72
45	1,69
50	1,67

Prozessfähigkeitsuntersuchung (PFU)

Die Prozessfähigkeitsuntersuchung soll sich auf einen Beobachtungszeitraum von mindestens 20 Produktionstagen beziehen. So gehen Einflüsse der Maschine, des Materials, der Methode, des Bedieners und der Umgebung in die Betrachtung ein. Dabei zieht man in möglichst gleichmäßigen Intervallen Stichproben im Umfang von 3 – 5 x 25 Stichproben (Empfohlen sind n=125). Zur Darstellung der Ergebnisse werden die Prozessfähigkeitskoeffizienten $\boldsymbol{C_p}$ und $\boldsymbol{C_{pk}}$ verwendet. Die Berechnung erfolgt nach den vorher dargestellten Beziehungen. Die wahren Werte unterliegen einer Zufallsstreuung, weshalb ein Gesamtstichprobenumfang von 125 empfohlen wird.
Für Stichprobenumfänge n < 125 gilt die Anforderung bezogen auf den unteren Vertrauensgrenzwert (Vertrauensbereich 95%, Tabelle analog VDI/VDE 2645).

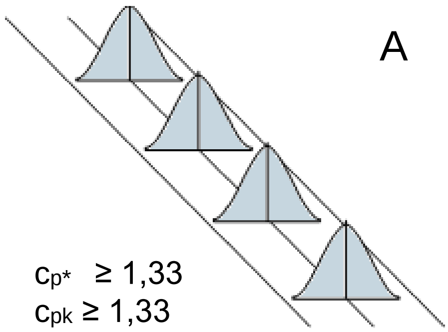
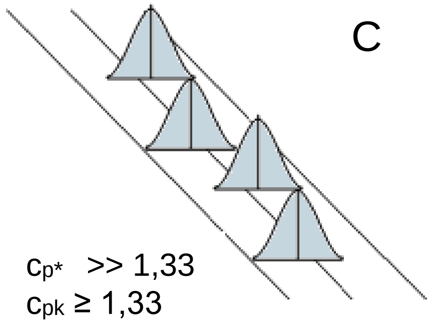
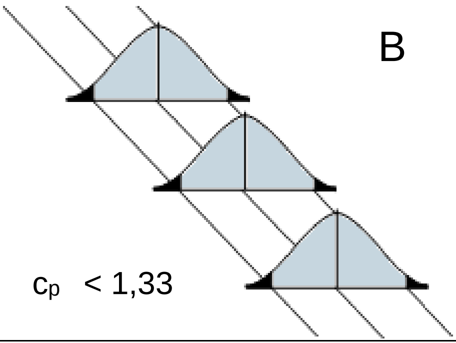
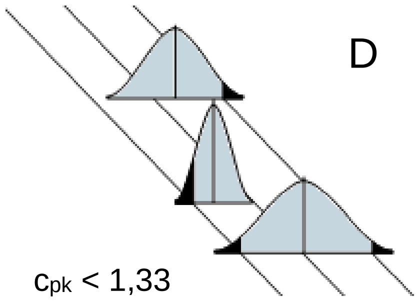
$$c_{pk} \geq 1{,}33 \frac{\left(1+\frac{1}{2\,n}\right)\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{n-1,\alpha}}}}{\left(1+\frac{1}{2\,n_{soll}}\right)\sqrt{\frac{n_{soll}-1}{\chi^2_{n_{soll}-1,\alpha}}}}$$

mit $n_{soll} = 125$

n	$C_{pk} \geq$
20	1,67
25	1,59
30	1,54
40	1,48
50	1,44
60	1,41
70	1,39
80	1,37
100	1,35
125	1,33

Stabile und beherrschte Prozesse

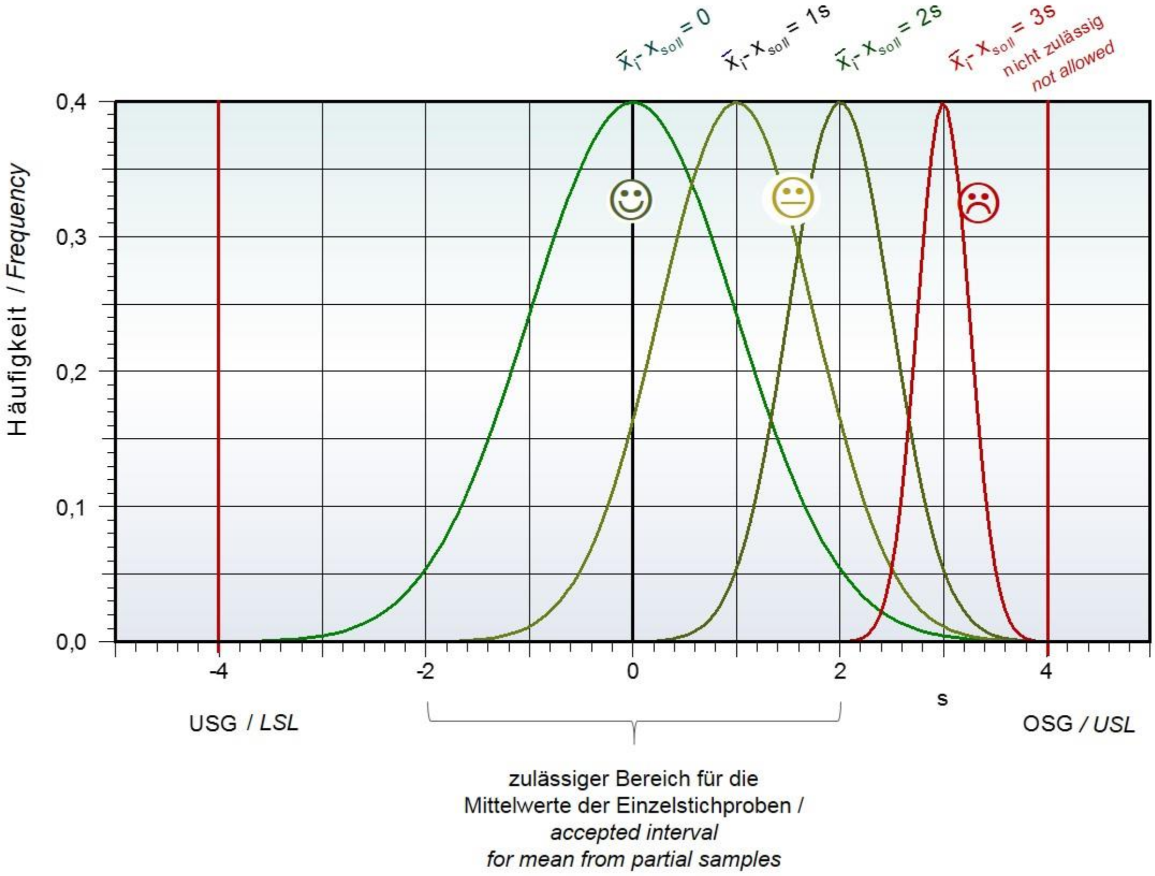
Neben der Prozessfähigkeit gibt es eine weitere Forderung. Der Verlauf der Prozessergebnisse muss über der Zeit möglichst stabil sein. Dies wird beschrieben durch die Mittelwerte von zeitlich aufeinanderfolgenden Einzelstichproben. Diese dürfen sich nicht zu stark verändern. In diesem Zusammenhang wird auch von einem beherrschten Prozess gesprochen. Die Einzelstichproben können sich vereinfacht in den folgenden möglichen Zuständen befinden:

	stabil / *stable*	**nicht stabil / *unstable***
fähig/ *capable*		
nicht fähig/ *not capable*		

Detailliertere Prozessmodelle sind der DIN ISO 22514-2 zu entnehmen. Zur Bestimmung dieser Zustände sind die Daten, z.B. aus der PFU oder aus Regelkarten, in Einzelstichproben chronologisch aufzuteilen.

Zustand A ist allen anderen vorzuziehen. Er weist den Prozess sowohl als fähig, sowie als stabil aus. Dieser Zustand muss erreicht werden, da er praktisch keinen Ausschuss liefert. Der Zustand C ist zwar fähig, aber nicht stabil bzw. nicht beherrscht, es besteht keine sichere Aussage über die künftige Fähigkeit. Eine dauerhaft einseitige Lage der Mittelwerte ist ebenfalls nicht erwünscht.

Um diese allgemeine Anforderung konkret zu definiere, wird folgender Vorschlag gemacht. Für zentrierte Prozesse, bei denen der Sollwert in der Toleranzmitte ist, gilt (siehe folgendes Bild): Liegen die Verteilungen der Einzelstichproben einseitig an der unteren oder oberen Toleranzgrenze, so darf der Mittelwert der Einzelstichproben hieraus maximal innerhalb $\pm$ 25 % der Toleranzmitte liegen. Für eine normierte Betrachtung bedeutet das, eine maximale Mittelwertverschiebung von $\pm$ 2s (die Standardabweichung s ist hier bezogen auf die PFU mit n = 125). Zu beachten ist, dass dies nur für Prozesse mit einer unvermeidlichen Drift, wie z.B. den „Vorhalt" eines Werkzeugverschleißes, anzuwenden ist. Ist hier C_p nicht genügend groß, so wird in der Regelkarte (häufig die Warngrenze überschritten und auch die Wahrscheinlichkeit einer Verletzung der Eingriffsgrenze steigt!



Literatur

/29/ Statistische Methoden der Qualitätssicherung
Horst Rinne, Hans-Joachim Mittag
Hanser, München/Wien 2002, ISBN 3-446-15503-1.

/30/ Handbuch Qualitätsmanangement
Masing
Hanser, München, ISBN 978-3-446-40752-7

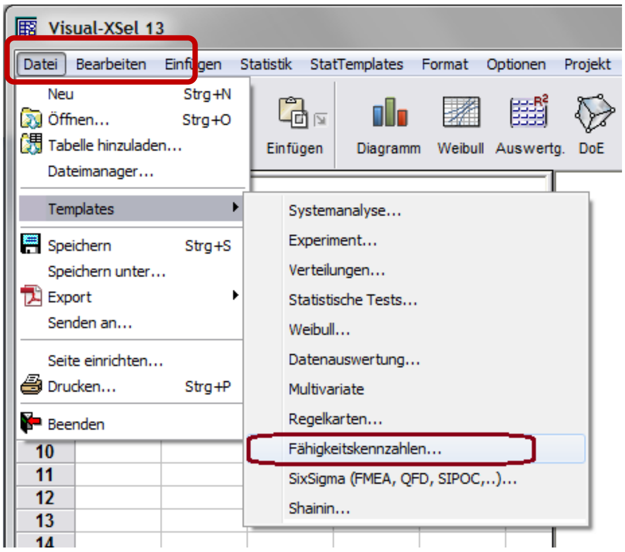
/31/ VDA Band 5 Prüfprozesseignung
Verband der Automobilindustrie e.V. VDA – QMC
2. Auflage, Frankfurt 2010, ISSN 0943-9412

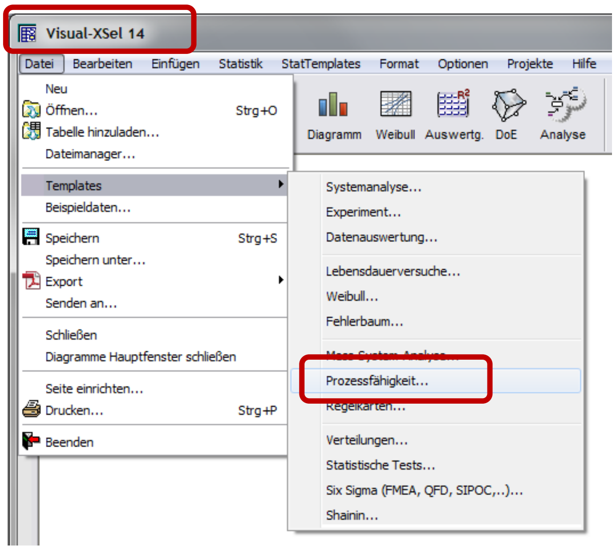
Prozessfähigkeit

Anwendung in Visual-XSel 14.0

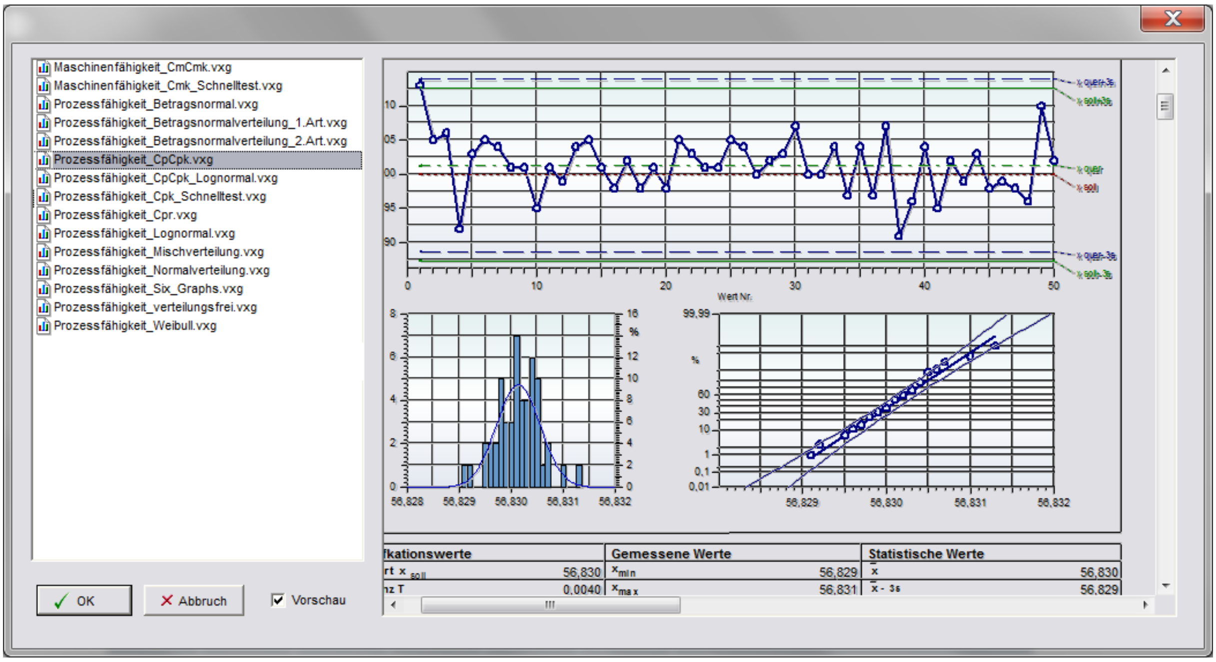
www.crgraph.de

Alle Verfahren und Analysen werden über Templates bereitgestellt. Verwenden Sie nach Start des Programms die Prozessfähigkeit im Startleitfaden, oder den Menüpunkt:



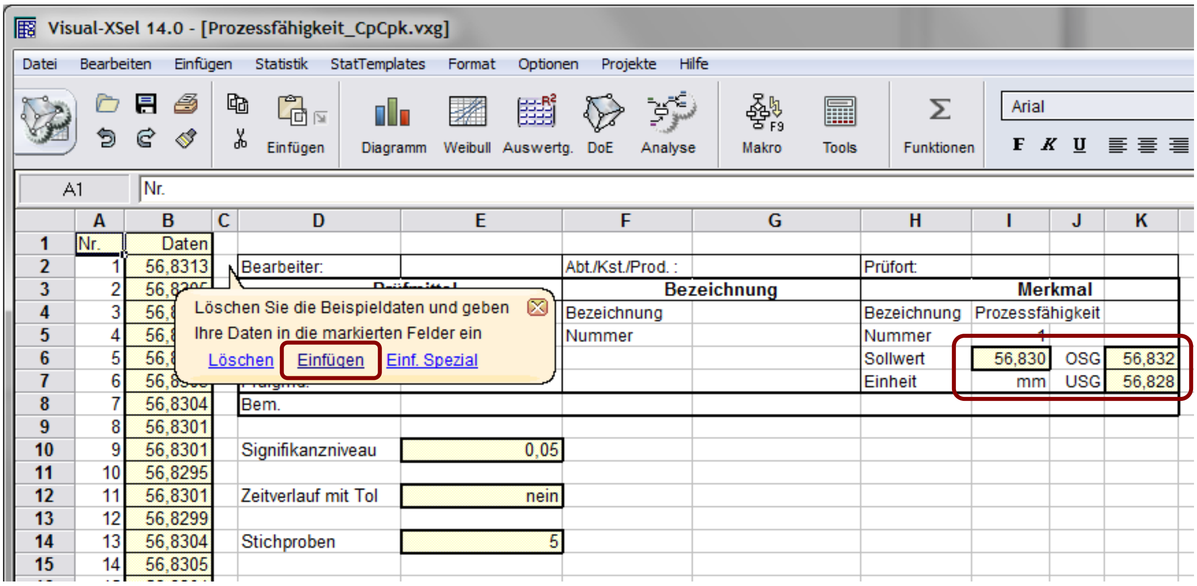


Wählen Sie das gewünschte Template aus der linken Liste aus:



Prozessfähigkeit

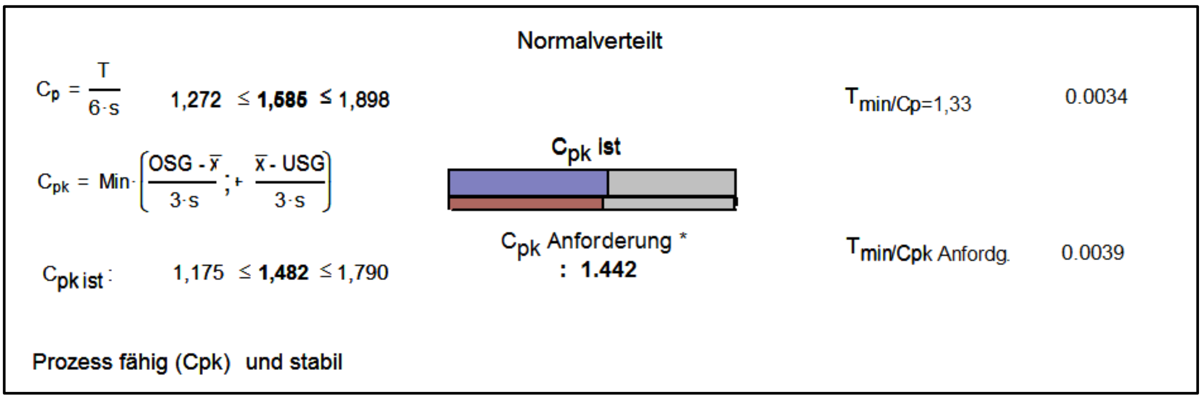
Verwenden Sie ein der drei Funktionen innerhalb der Sprechblase, z.B. „Einfügen“, wenn Sie bereits die Datenreihe in der Zwischenablage haben.



Danach müssen noch der Sollwert und OSG, sowie USG definiert werden. Optional kann noch das Signifikanzniveau geändert werden und der Zeitverlauf der Mittelwerte von jeweils 5 Werten in diesem Beispiel ausgewählt werden. Steht „Zeitverlauf mit Tol“ auf „nein“, so wird im Zeitverlauf auf der Seite 2 nur OSG und USG dargestellt.

Nach Befüllung aller notwendigen Daten ist das Makro mit F9 zu starten, oder die Ikone, auf die die zweite Sprechblase zeigt.

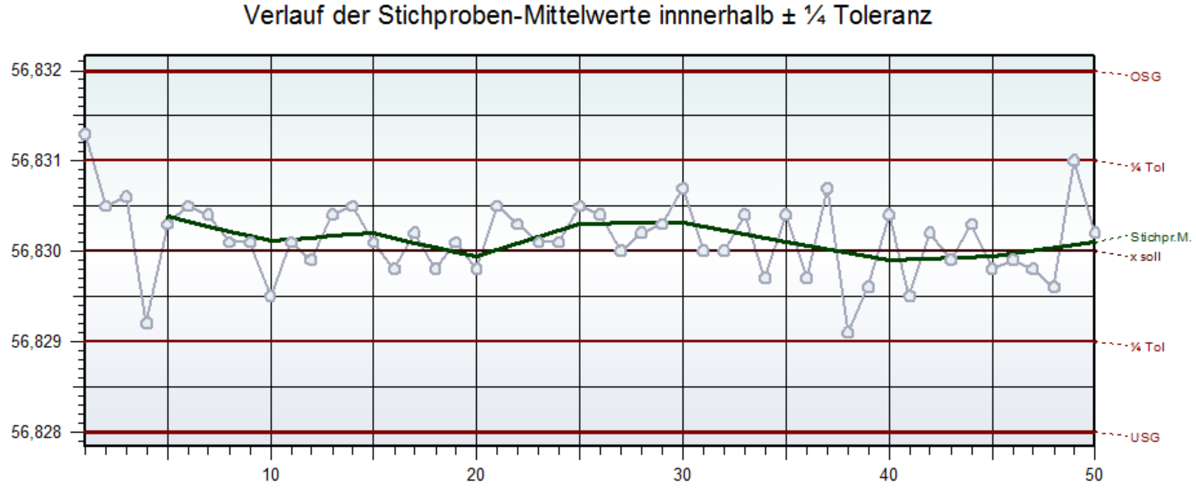
Im oberen Teil der Seite 1 werden nun die jeweiligen Grafiken der Daten gezeigt. Im unteren Teil erscheinen die Ergebnisse:



Links wird C_p und C_{pk} mit einem Vertrauensbereich angezeigt (abhängig vom Signifikanzniveau). In der Mitte ist eine Balkengrafik zu sehen, die im oberen Teil in blau das Ergebnis ohne Vertrauensbereich darstellt. Darunter wird die Anforderung in rot gegenübergestellt. Wenn weniger als 125 Datenwerte verwendet werden, wie hier, erhöht sich die Anforderung. In diesem Fall ist C_{pk} = 1,585 ≥ 1,442, womit links unten der Prozess als fähig ausgegeben wird. Hinweis: Der Vertrauensbereich von C_{pk} ist nicht mit dem Vertrauensgrenzwert der Anforderung nach VDI/VDE 2645 zu verwechseln.
Auf der rechten Seite wird eine minimale Toleranz angezeigt, die notwendig ist, um genau die Anforderung zu erfüllen. Wird die Prozessfähigkeit nicht erreicht, hat man

damit die Möglichkeit die Toleranz zu erweitern, sofern das für die Funktion des Merkmales möglich ist.

Der Zusatz „stabil“ aus der Analyse des Zeitverlaufes der Stichproben, der auf Seite 2 dargestellt ist.



Der Verlauf der Mittelwerte, hier jeweils aus 5 Werten bestimmt, liegt deutlich innerhalb von ± ¼ der Toleranz, womit nach eingangs beschriebener Definition der Prozess als stabil gilt.
Hinweis: Diese Betrachtung ist nur möglich bei mittenzentrierten Prozessen.

Literatur

Taschenbuch der statistischen Qualitäts- und Zuverlässigkeitsmethoden

Die wichtigsten Methoden und Verfahren für die Praxis.

Beinhaltet statistische Methoden für Versuchsplanung & Datenanalyse, sowie Zuverlässigkeit & Weibull.

- Statistische Verteilungen und Tests & Mischverteilungen
- Six Sigma Einführung und Zyklen
- Systemanalysen Wirkdiagramm, FMEA, FTA, Matrizen-Methoden
- Shainin- und Taguchi-Methoden
- Versuchsplanung DoE, D-Optimal
- Korrelations- und Regressionsverfahren
- Multivariate Datenauswertungen
- Prozessfähigkeit – Messmittelfähigkeit MSA 4 und VDA 5
- Regelkarten
- Toleranzrechnung und Monte-Carlo-Simulation
- Statistische Hypothesentests
- Weibull und Lebensdaueranalysen
- Stichprobengröße

190 Seiten, Ringbuch

ISBN: 978-3-00-043678-9