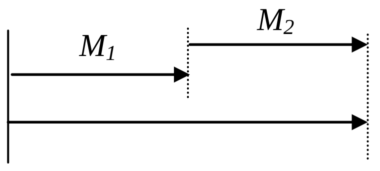
Toleranzberechnung

Zur Bestimmung der ungünstigsten Toleranz zusammengesetzter Systeme können die Einzeltoleranzen entsprechend ihres Zusammenwirkens addiert werden.

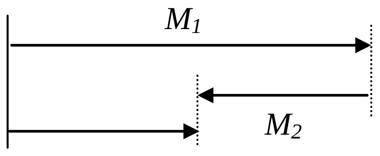


$$M = M_1{}^{ob\,Tol}_{unt\,Tol} + M_2{}^{ob\,Tol}_{unt Tol}$$

Für ein additives Summenmaß gilt, dass sich die unteren und oberen Toleranzen aufsummieren, z.B:

$$10^{+0,1}_{-0,2} + 5^{+0,1}_{-0,3} = 15^{+0,2}_{-0,5}$$

Für eine Maßkette, bei der das zweite Maß in die entgegengesetzte Richtung zeigt, gilt die Minus-Operation:



$$M = M_1{}^{ob\,Tol}_{unt\,Tol} - M_2{}^{-(unt\,Tol)}_{-(ob\,Tol)}$$

Bei der Minus-Operation werden die oberen und unteren Toleranzen des entgegengesetzt zeigenden Maßes vertauscht und mit –1 multipliziert, z.B. gilt für die oben gezeigten Toleranzen: $10^{+0,1}_{-0,2}$; $5^{+0,1}_{-0,3}$

$$10^{+0,1}_{-0,2} - 5^{+0,3}_{-0,1} = 5^{+0,4}_{-0,3}$$

Diese Extremlagen werden in der Wirklichkeit jedoch „selten“ erreicht (mit geringer Wahrscheinlichkeit). Sinnvoll ist hier einzig und allein eine statistische Betrachtungsweise.

Das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz

Weil statistische Fehler mit gleicher Wahrscheinlichkeit einen Wert verkleinern oder vergrößern, d.h. verschiedene in das Ergebnis eingehende statistische Fehler einander teilweise kompensieren, verwendet man eine Formel, die diesen Kompensationseffekt berücksichtigt, das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$s_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 s_{x1}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 s_{x2}^2 + \ldots.}$$

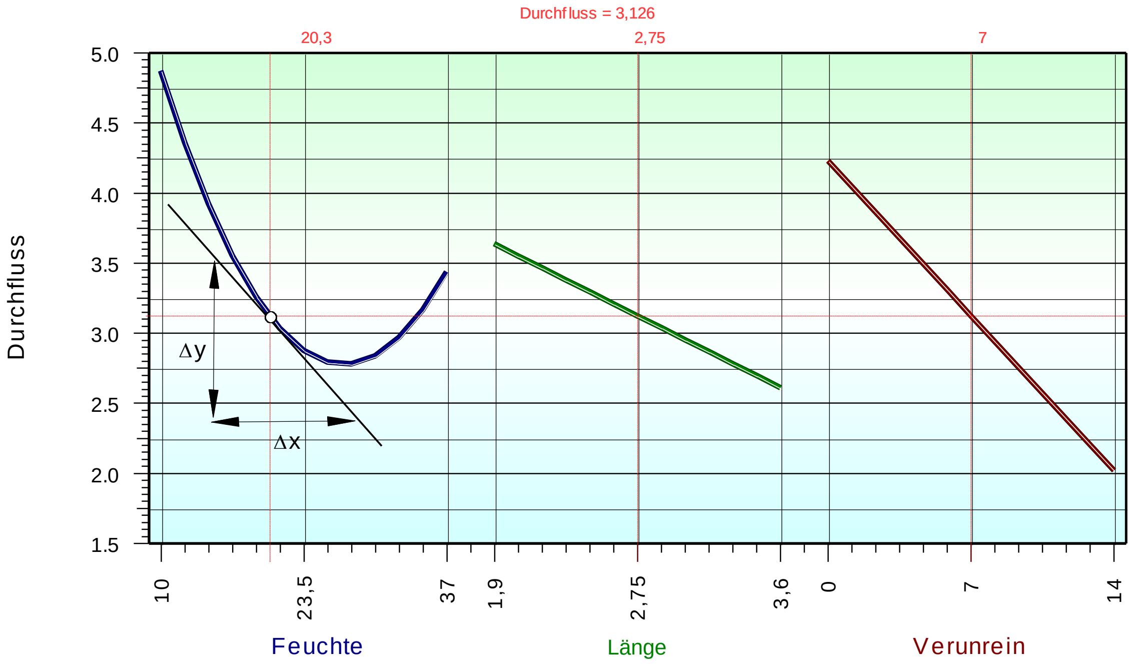
Darin gehen die Varianzen der einzelnen Faktoren x_i mit den quadrierten partiellen Ableitungen (Steigungen) ein. Durch das Quadrieren gehen negative Vorzeichen nicht mit ein. Für ein einfaches lineares Modell

$$Y = b_o + b_1\, x_1 + b_2\, x_2 + \ldots.$$

gilt dann vereinfacht:

$$s_y = \sqrt{(b_1\, s_{x1})^2 + (b_2\, s_{x2})^2 + \ldots}$$

da die Koeffizienten aus der multiplen Regression bereits die Steigungen darstellen. Sind höherwertige Terme, z.B. quadratische und Wechselwirkungen enthalten, so ist die Steigung für den jeweiligen Einstellungspunkt explizit zu bestimmen, z.B. für die Feuchte $b = \Delta y/\Delta x$



Zu beachten ist, dass sich auch lineare Kurvenverläufe durch Wechselwirkungen ändern, ja sogar umkehren können. Die jeweiligen Steigungen gelten also immer nur für eine bestimmte Parametereinstellung. Ist es möglich Größen mit hoher Streuung und nichtlinearem Verlauf in Bereiche flacherer Steigung zu setzen, so wirken sich diese Streuungen evtl. erheblich geringer aus (Taguchi-Prinzip).

Für den einfachsten Fall einer geometrischen Maßaddition $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots$, bei der die Koeffizienten alle 1 sind, gilt:

$$s_y = \sqrt{s_{x1}^2 + s_{x2}^2 + \ldots}$$

Aufgrund der quadratischen Anteile dominieren große Streuungen. Ist z.B. eine Standardabweichung 5 und die andere 1, so ist die Gesamtstandardabweichung 5,1. D.h. die kleinere Standardabweichung fällt nicht ins Gewicht. Aus diesen einfache Überlegungen ergeben sich entscheidende Konsequenzen für das Design von zusammengesetzten Systemen.

Abschätzung der Einzelstreuungen aus den Toleranzen

Sind die jeweiligen Standardabweichungen nicht bekannt, so sind die Toleranzangaben aus der Konstruktion zu verwenden. Dabei müssen diese symmetrisch sein, z.B.:

$2{,}8^{+0{,}2}_{-0{,}1} \;\; -> \;\; 2{,}85 \pm 0{,}15$

µ wird Sollwert und T als die halbe gleiche Toleranzbreite bezeichnet (hier 0,15).

$\mu \pm T$

Um auf die Standardabweichung zu schließen, müssen Annahmen über die Verteilung getroffen werden. Die häufigste verwendete Verteilung ist die Normalverteilung, da die Abweichungen vom Sollwert meist zufällig verteilt sind. Häufig ist auch in diesem Zusammenhang von einer Rechteckverteilung die Rede. Diese wäre z.B. durch den Verschleiß eines Werkzeuges gegeben, mit einer gleichmäßigen „Drift" der Mittellage. Besser ist hier jedoch trotzdem mit einer Normalverteilung zu arbeiten und dafür einen schlechteren Prozessfähigkeitswert C_p anzusetzen. Allgemein gilt also

$$c_p = \frac{T/2}{3\,s}$$

woraus sich mit bekanntem, bzw. vorgegebenem C_p s schätzen lässt:

$$s = \frac{T/2}{3\,c_p}$$

Abhängige Größen

Die vereinfachte Formel für die Gesamtstreuung $s_y = \sqrt{s_{x1}^2 + s_{x2}^2 + ...}$ gilt nur für unabhängige Maßketten oder Größen. Bei einer statistischen Abhängigkeit (Korrelation) verändert sich diese für den Fall von 2 Komponenten:

$$s_y = \sqrt{s_{x1}^2 + s_{x2}^2 + 2\,r_{12}\,s_{x1}\,s_{x2}}$$

Für den Extremfall, dass die Korrelation r = -1 ist, ergibt sich:

$s_{12} = |s_1 - s_2|$

und für r = 1:

$s_{12} = s_1 + s_2$

Bei starker negativer Korrelation heben sich die Streuungen gegenseitig auf, bei starker positiver Korrelation addieren sich diese. Negativ korrelierende Größen haben also einen entscheidenden Vorteil und sind zu suchen. Sie wirken wie negativ rückgekoppelte Systeme systemstabilisierend. Allgemein gilt für mehr als 2 Größen:

$$s_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \left(s_i^2 + 2 \cdot \sum_{j=i+1, i<k}^{k} \left(r_{i,j}\, s_i\, s_j \right) \right)}$$

Die Korrelation der Größen kann nur durch konkrete Daten und Versuche bestimmt werden. Da dies immer nur Stichproben sein werden, sind diese Aussagen mit entsprechender Unsicherheit behaftet.

Für weitere Betrachtungen sei auf die Beschreibungen der

Prozessfähigkeit

Prozessdaten Toleranzsimulation

verwiesen.